Oberlin College Library
JUN 8 1926
Not to be Drawn

Physikalische Zeitschrift

begründet von E. Riecke und H. Th. Simon

vereinigt mit dem

Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik

begründet von Johannes Stark

Herausgeber:

Prof. Dr. P. Debye, Prof. Dr. F. Harms und Prof. Dr. R. Seeliger

Die Physikalische Zeitschrift erscheint monatlich zweimal im Umfange von drei bis vier Bogen und wird vierteljährlich für Goldmark 11.— postfrei geliefert. Für das Ausland beträgt der Preis $ 3.— vierteljährlich. Für die Mitglieder der Deutschen Physikalischen Gesellschaft im Inland Goldmark 9.—, im Ausland $ 2.60. Bestellungen nehmen jede Buchhandlung sowie die Verlagsbuchhandlung entgegen. Anzeigen werden für die einmal gespaltene Millimeterzeile mit Goldmark —.35, Beilagen mit Goldmark 60.— berechnet.

Alle Manuskripte und darauf bezügliche Zuschriften sind an Prof. Dr. F. Harms, Würzburg, Bismarckstr. 1, zu senden, mit Ausnahme der zusammenfassenden Berichte, deren Redaktion Prof. Dr. R. Seeliger, Greifswald, Loitzerstr. 43, führt. Büchersendungen und Anzeigen-Aufträge direkt an den Verlag.

No. 10. Ausgegeben am 15. Mai 1926. No. 710. Printed in Germany. 27. Jahrgang.

INHALT:

Originalmitteilungen:

K. F. Niessen, Über die Ionenladungen in chemischen Verbindungen von tetraedrischer Kristallstruktur. S. 299—306.

K. W. F. Kohlrausch und E. Schrödinger, Das Ehrenfestsche Modell der *H*-Kurve. S. 306—313.

V. v. Keußler, Über Depolarisation von Resonanzstrahlung durch schwache Magnetfelder. S. 313—316.

G. Kull, Graphische Darstellung und Integration von ins Unendliche laufenden Kurven. S. 316—326.

H. Fricke, Die Herkunft der Strahlungsenergie der Fixsterne. S. 326—332.

Zusammenfassende Berichte:

J. Schmekel, Abkühlung heißer Körper in Gasen und Flüssigkeiten. II. S. 332—344.

Besprechungen:

W. Böttger, Qualitative Analyse und ihre wissenschaftliche Begründung. S. 345.

Ostwald-Luther, Hilfsbuch zur Ausführung physikochemischer Messungen. S. 345—346.

A. Fodor, Die Grundlagen der Dispersoidchemie. S. 346.

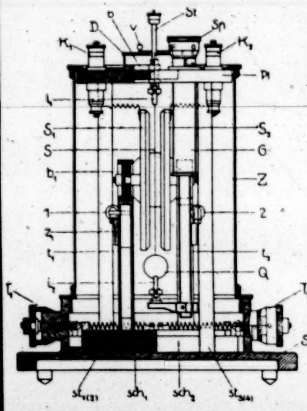
Astronomischer Kalender für 1926. S. 346.

Personalien. Angebote. S. 346.

VERLAG VON S. HIRZEL IN LEIPZIG

Phys.-mech. Institut von Prof. Dr. M. Th. Edelmann & Sohn,

München.



Saiten-Elektrometer

nach Lutz-Edelmann (neue Form).

C. W. Lutz, Physik. Zeitschrift, 24. Jahrgang. 1923. Seite 166—170.

Katalog 30, Spezialliste No. 32 über Saitengalvanometer und Registrierapparate, Spezialliste No. 31 über einfache Präzisionsschulapparate gratis und franko.

Wissenschaftliche Optik

aus

Kalkspat
Quarz
Flußspat
Gips u. Glimmer
Steinsalz
Glas

B. Halle Nachfl.
Optische Werkstätten
Berlin-Steglitz.

Carl Schleicher & Schüll
Düren, Rheinland

Schutz-Marke Schleicher Schüll Papier.

empfehlen

Millimeter-Zeichen- u. Pause-Papiere in Rollen, Bogen u. Blocks in unübertroffener Herstellung.
Koordinaten, Logarithmen-, Sinus- u. Windrosenpapiere.
Blätter für Registrierapparate aller Art.
Allerbeste: Zeichen-, Pause-, durchsichtige Entwurf-Papiere, Pauseleinwand.

Muster auf Anfrage kostenlos.

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

vereinigt mit dem

JAHRBUCH DER RADIOAKTIVITÄT UND ELEKTRONIK

No. 10. 15. Mai 1926. Redaktionsschluß für No. 12 am 5. Juni 1926. 27. Jahrgang.

INHALT:

Originalmitteilungen:

K. F. Niessen, Über die Ionenladungen in chemischen Verbindungen von tetraedrischer Kristallstruktur. S. 299.

K. W. F. Kohlrausch u. E. Schrödinger, Das Ehrenfestsche Modell der *H*-Kurve. S. 306.

V. v. Keußler, Über Depolarisation von Resonanzstrahlung durch schwache Magnetfelder. S. 313.

G. Kull, Graphische Darstellung und Integration von ins Unendliche laufenden Kurven. S. 316.

H. Fricke, Die Herkunft der Strahlungsenergie der Fixsterne. S. 326.

Zusammenfassende Berichte:

J. Schmekel, Abkühlung heißer Körper in Gasen und Flüssigkeiten. II. S. 332.

Besprechungen:

W. Böttger, Qualitative Analyse und ihre wissenschaftliche Begründung. S. 345.

Ostwald-Luther, Hilfsbuch zur Ausführung physikochemischer Messungen. S. 345.

A. Fodor, Die Grundlagen der Dispersoidchemie. S. 346.

Astronomischer Kalender für 1926. S. 346.

Personalien. S. 346.

Angebote. S. 346.

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Über die Ionenladungen in chemischen Verbindungen von tetraedrischer Kristallstruktur.

Von K. F. Niessen.

Die von H. Grimm und A. Sommerfeld vorgeschlagene Viererschalentheorie geht von einer anderen Vorstellung über Verbindungen von elektropositiven und elektronegativen Elementen aus als die frühere Achterschalentheorie, nach der immer eines der Elemente bis zum vorhergehenden Edelgas abgebaut und das andere zur nächsten Edelgaskonfiguration aufgebaut wird.

In jener Theorie wird angenommen, daß die verbundenen Elemente nicht als isolierte Ionen vorliegen, sondern nach Art der *C*-Atome im Diamanten verknüpft sind. Den Bindungsvorgang denkt man sich zweckmäßig so vorgenommen, daß beide Elemente zunächst zur vorhergehenden Edelgaskonfiguration abgebaut und dann mit Hilfe ihrer Valenzelektronen diamantartig verknüpft werden.

Betrachten wir also Verbindungen zweier Elemente vom Typus MX, die im periodischen System gleich weit von der IV. Vertikalreihe (genauer gesagt von den Elementen *C*, *Si*, *Ge*, *Sn*, *Pb*) abstehen, d. h. Verbindungen, die man symbolisch darstellen kann durch

$$(\mathrm{I\,VII}),\quad (\mathrm{II\,VI}),\quad (\mathrm{III\,V}),\qquad (1)$$

wo die römischen Ziffern Elemente aus der entsprechenden Spalte des periodischen Systems bedeuten, so werden bei dem Abbau 8 Elektronen frei, während die Atomreste alle positiv geladen und mit I^{+}, $\mathrm{VII}^{+++++++}$, II^{++}, usw. zu bezeichnen sind.

Zeigt nun die Röntgenaufnahme einer solchen Verbindung, daß sie tetraedrische Atomanordnung, d. h. Diamant- oder Wurtzitstruktur besitzt, so können wir versuchsweise diese acht losgerissenen Elektronen die positiven Atomreste in ähnlicher Weise umkreisen lassen wie die Valenzelektronen im Diamantgitter.

Nach der ursprünglichen Bohrschen Theorie[1]) des periodischen Systems laufen nun die vier Valenzelektronen des *C* in 2_1-Bahnen, und zwar so, daß die Normalen der Bahnebenen nach den Eckpunkten eines Tetraeders weisen. Da das *C*-Atom sehr stabil ist, so muß auch diese Ellipsenkonfiguration stabil sein, d. h. die 4 Elektronen dürfen sich gegenseitig nicht viel beeinflussen. Wir stellen uns die Verbindung zweier *C*-Atome so vor, daß eine Ellipse des einen Atoms mit einer solchen eines anderen zusammenfällt, wobei sie von zwei Elektronen durchlaufen wird; die Größe dieser gemeinsamen Ellipse ist dabei natürlich verschieden von der ursprünglichen 2_1-Bahn im einzelnen *C*-Atom. Auch hier nehmen wir an, daß die gegenseitige Beeinflussung dieser Elektronen in erster Näherung vernachlässigt werden darf. Im Diamantgitter steht nun jeder *C*-Rest im Mittelpunkt eines Tetraeders, dessen Eckpunkte von gleichen Atomresten gebildet werden. Die Bindung geschieht in der geschilderten Weise, so daß also jeder Atomrest von $4 \times 2 = 8$ Elek-

1) Die neuere Entwicklung (Main Smith, Stoner) hat gezeigt, daß spektroskopisch, d. h. im isolierten Atom, nicht vier äquivalente 2_1-Bahnen, sondern zwei 2_1- und zwei 2_2-Bahnen vorhanden sein müssen. Wir werden im folgenden annehmen, daß im Kristallgefüge die Bahnen trotzdem äquivalent sind.

tronen „besucht" wird[1]). Da sich diese aber ebenso lange bei dem fraglichen C-Rest wie bei einem benachbarten aufhalten, läuft es praktisch darauf hinaus, daß jeder C-Rest im Durchschnitt 4 Elektronen um sich gelagert hat und scheinbar das C-Atom unverletzt geblieben ist.

Bei den im folgenden in Frage kommenden chemischen Verbindungen liegen die Atomreste ebenfalls tetraedrisch zueinander. In BeO z. B., das zum Typ (II VI) gehört, nehmen wir an, daß jedes Be^{++} tetraedrisch von vier O^{++++} und jedes O^{++++} tetraedrisch von vier Be^{++} umgeben ist. Auch hier soll die Bindung dieselbe sein wie beim Diamantgitter. Nimmt man zunächst an, daß sich im Mittel die Bindungselektronen ebenso lange bei den Atomresten der einen wie der anderen Art aufhalten, so sieht man leicht, daß sich durch Überlagerung der Elektronenwolke über die positiven Atomreste effektiv die Verbindungen

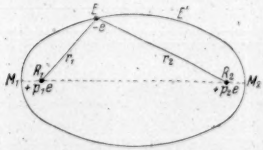
$$(I^{---}\ VII^{+++}),\ (II^{--}\ VI^{++}),\ (III^{-}\ V^{+}) \quad (2)$$

ergeben würden.

Man bemerkt, daß nach der „Viererschalentheorie" die Ionenladungen desto stärker ausfallen, je weiter die Elemente von der Spalte des Kohlenstoffes entfernt sind, während in der „Achterschalentheorie" das Entgegengesetzte der Fall war. Auch das Vorzeichen war dort anders als hier. Auf Anregung von Herrn Professor Sommerfeld habe ich nun untersucht, inwieweit die obige Annahme über die im Mittel gleiche Verteilung der Elektronen auf ungleich geladene Atomreste berechtigt ist.

§ 1. Mathematische Formulierung des Problems.

Betrachten wir ein Elektron, das in einer Ellipse um die Ladungen $+p_1e$ und $+p_2e$ in den Focis R_1, R_2, (Fig. 1) herumläuft.



Da $+p_1e$ bzw. $+p_2e$ die Restladung eines Elementes aus der 1., 2., 3. bzw. 7., 6., 5. Spalte des periodischen Systems darstellen soll, ist:

$$p_1 < 4, \quad p_2 > 4$$

und es gilt

$$p_1 + p_2 = 8.$$

Nun kann man leicht mit Hilfe eines Theorems von Bonnet[1]) nachweisen, daß das Elektron länger auf der linken als auf der rechten Hälfte der Ellipse verweilt.

Dieses Theorem lautet:

Kann eine Bahn unter der Wirkung zweier verschiedener Ursachen einzeln durchlaufen werden, das eine Mal mit einer Geschwindigkeit v_1 in einem beliebigen Punkt der Bahn, das andere Mal mit einer Geschwindigkeit v_2 in demselben Punkt, so kann sie auch unter der gleichzeitigen Wirkung beider Ursachen durchlaufen werden, aber dann mit einer Geschwindigkeit v in dem fraglichen Punkte, die durch die Gleichung

$$v^2 = v_1^2 + v_2^2$$

bestimmt wird.

Da jeder der beiden Atomreste in einem Brennpunkt steht, kann das Elektron die Ellipse sowohl unter der bloßen Anziehung der Ladung $+p_1e$ wie unter der Anziehung von $+p_2e$ durchlaufen.

Nennen wir die entsprechenden Geschwindigkeiten in einem Punkte E auf der linken Hälfte v_1 und v_2, so gilt demnach:

$$\left.\begin{aligned} {}^1/_2 m v_1^2 - \frac{p_1 e^2}{r_1} &= A_1, \\ {}^1/_2 m v_2^2 - \frac{p_2 e^2}{r^2} &= A_2, \end{aligned}\right| \quad (3)$$

wobei m die Masse des Elektrons, r_1 und r_2 die Abstände des Elektrons vom linken bzw. rechten Focus, A_1 und A_2 die Energiekonstanten der Teilbewegungen bedeuten.

Für die wirkliche Geschwindigkeit v_E in E (Figur) gilt also:

$${}^1/_2 m v_E^2 = A_1 + A_2 + \frac{p_1 e^2}{r_1} + \frac{p_2 e^2}{r_2}, \quad (3a)$$

$$\text{mit } r_1 < r_2.$$

Ist E' der in bezug auf E symmetrisch gelegene Punkt, so ist für diesen r_2 der Abstand von p_1e und r_1 der Abstand von p_2e.

Infolgedessen gilt:

$${}^1/_2 m v_{E'}^2 = A_1 + A_2 + \frac{p_1 e^2}{r_2} + \frac{p_2 e^2}{r_1} \quad (3b)$$

und daraus:

$${}^1/_2 m (v_E^2 - v_{E'}^2) = e^2 (p_1 - p_2) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \quad (3c)$$

Nun war $p_1 < p_2$ und $r_1 < r_2$, so daß wir bekommen

$$v_E < v_{E'}.$$

1) Von einem eventuellen Eintauchen dieser Elektronen in die Atomreste, das zu einer Verzerrung der Ellipse führen würde, soll hier und im folgenden abgesehen werden.

1) Vgl. etwa Whittaker, Analytical Dynamics of a Particle, pag. 94.

Das Elektron durchläuft also die linke Hälfte der Ellipse langsamer als die rechte, d. h. es befindet sich länger bei dem Atomrest, von dem es weniger angezogen wird.

Dies hat eine Änderung der in (2) berechneten Ionenladungen zur Folge.

Teilen wir nämlich von jedem Elektron dem schwächer geladenen Atomrest $(+ p_1 e)$ die Ladung

$$L_1 = - e (1/2 + \varepsilon)$$

zu, wo $0 < \varepsilon < 1/2$ und deshalb dem stärker geladenen die Ladung

$$L_2 = - e (1/2 - \varepsilon),$$

so tritt in der chemischen Verbindung das Element aus der p_1^{ten} bzw. p_2^{ten} Spalte des periodischen Systems auf als Ion mit der Ladung:

$$\left.\begin{aligned} &+ p_1 e - 8 e (1/2 + \varepsilon) = \\ &- e (4 - p_1 + 8 \varepsilon). \end{aligned}\right\} \quad (4a)$$

bzw.

$$\left.\begin{aligned} &+ p_2 e - 8 e (1/2 - \varepsilon) = \\ &+ e (p_2 - 4 + 8 \varepsilon) \end{aligned}\right\} \quad (4b)$$

Nun folgt aus

$$p_1 + p_2 = 8:$$
$$4 - p_1 = p_2 - 4,$$

d. h., daß die Ionen entgegengesetzt gleich geladen sind. Ihre Ladung weicht aber im absoluten Wert um den Betrag $8 \varepsilon e$ von der in (2) angegebenen ab.

Es handelt sich nun darum, ε quantitativ zu bestimmen.

Dazu kann man verschiedene Wege einschlagen. Man könnte z. B. das Elektron in zwei Teile L_1 und L_2 zerlegen nach dem Verteilungsgesetz:

$$L_1 : L_2 = T_1 : T_2,$$

wobei T_1 und T_2 die Zeiten darstellen, die das Elektron zum Durchlaufen der linken bzw. rechten Hälfte der Ellipse braucht.

Dieses Verfahren eignet sich aber nicht für die Rechnung, da man dann auf „unvollständige" elliptische Integralen dritter Art stößt.

Eine andere Verteilungsweise, die ebenso plausibel und mathematisch eleganter ist, gründet sich auf folgender Überlegung:

Befindet sich das Elektron in einem Bahnelement bei $E (r_1, r_2)$, so wollen wir es umgekehrt proportional den Fahrstrahlen r_1 und r_2 über die Atomreste R_1, R_2 verteilen.

Diese Teile:

$$l_1 = - e \frac{r_2}{r_1 + r_2},$$

$$l_2 = - e \frac{r_1}{r_1 + r_2}$$

werden natürlich in jedem Punkte der Ellipse wieder andere sein, so daß wir, um die effektiven Ladungen L_1 und L_2 zu erhalten, das Zeitmittel über l_1 und l_2 bilden müssen.

Da $r_1 + r_2$ während der Bewegung konstant (gleich der großen Achse 2ξ der Ellipse) ist, können wir schreiben:

$$L_1 = \overline{l_1} = \frac{-e}{2\xi} \overline{r_2} = - \frac{e \overline{r_2}}{r_1 + r_2} = - e \left[1/2 + \frac{\overline{r_2} - \overline{r_1}}{2 (r_1 + r_2)} \right],$$

$$L_2 = \overline{l_2} = \frac{-e}{2\xi} \overline{r_1} = - \frac{e \overline{r_1}}{r_1 + r_2} = - e \left[1/2 - \frac{\overline{r_2} - \overline{r_1}}{2 (r_1 + r_2)} \right],$$

so daß wir finden:

$$\varepsilon = \frac{\overline{r_2} - \overline{r_1}}{2 (r_1 + r_2)}, \quad (5)$$

was auch der Forderung $0 < \varepsilon < 1/2$ genügt, weil $\overline{r_2} > \overline{r_1}$ wegen des längeren Aufenthaltes auf der linken Hälfte der Ellipse.

§ 2. Ergebnisse und Diskussion.

Wir führen nun elliptische Koordinaten ξ, η ein:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= 1/2 (r_1 + r_2), \\ \eta &= 1/2 (r_2 - r_1). \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Ist der Abstand der Atomreste $R_1 R_2 = 2d$, so können wir noch zu dimensionslosen Koordinaten x, y übergehen, wenn wir setzen:

$$\frac{\xi}{d} = x, \quad \frac{\eta}{d} = y.$$

Die Größe x bleibt konstant und ist offenbar der reziproke Wert der Exzentrizität k der Ellipse:

$$x = \frac{1}{k}.$$

Die Größe y ist die einzige Variabele und wir erhalten aus (5)

$$\varepsilon = \frac{k}{2} \overline{y}. \quad (6a)$$

Natürlich wird $\overline{y}$ desto größer sein, je mehr die Ladungen $p_1 e$ und $p_2 e$ voneinander verschieden sind.

Auch hängt $\overline{y}$ von der Exzentrizität k ab, denn es ist zum Beispiel klar, daß für $k = 0$ $\overline{y} = 0$ wird, d. h. wenn die Ellipse in einen unendlich großen Kreis entartet.

Wie $\overline{y}$ genau als Funktion von k bei gegebenen p_1 und p_2 als Parameter (die nur in ihrem Verhältnis p_1/p_2 eingehen) berechnet wird, werden wir in § 2 zeigen.

Nach (6) ist dann auch ε als Funktion von k bestimmt.

Wir geben in Tabelle I die so berechneten Werte von 8ε an:

Tabelle I.

$k = \frac{1}{x}$	8ε bei $p_1 = 1$ „ $p_2 = 7$	8ε bei $p_1 = 2$ „ $p_2 = 6$	8ε bei $p_1 = 3$ „ $p_2 = 5$
1	0,60	0,34	0,16
1/1,5	0,50	0,30	0,14
1/2	0,33	0,20	0,10
1/2,5	0,22	0,14	0,07
1/3	0,16	0,10	0,05
1/3,5	0,11	0,08	0,03
1/4	0,08	0,06	0,02
0	0	0	0

Nach den Ausdrücken (4a) und (4b) können wir nun in Tabelle A die Ladung der Ionen, bezogen auf e als Einheit, angeben, die aus den Elementen I, II ..... VII in den betrachteten Verbindungen entstehen.

Hätte man die ungleichmäßige Verteilung der Elektronen nicht in Betracht gezogen, so wäre die Ionenladung ganz unabhängig von k gewesen, und zwar wie in Tabelle A für $k = 0$:

$$-3, -2, -1, 0, +1, +2, +3.$$

Zur Vervollständigung der Übersicht geben wir noch in Tabelle B die Ionenladungen, wie sie nach der Achterschalentheorie sein sollten.

Nach freundlicher Mitteilung von Herrn Dr. Ott ergeben sich röntgenometrisch bei den diamantähnlichen Verbindungen der II. mit VI., III. mit V., IV. mit IV. Vertikalreihe des periodischen Systems für die einzelnen Komponenten Röntgenstreuvermögen, die mit heteropolarer Bindung (nach der Achterschalentheorie) nicht vereinbar sind, wenn das Streuvermögen eines Atoms in üblicher Weise der Elektronenzahl proportional gesetzt wird. Es wurden z. B. für die Verbindungen: SiC, AlN, BeO, ZnS folgende Werte für das Verhältnis des Streuvermögens gefunden[1]):

$\frac{Si}{C} = 2{,}33$[2]), $\frac{Al}{N} = 1{,}8-2{,}3$[3]), $\frac{O}{Be} = 2{,}0-1{,}6$ bzw. der reziproke Wert $0{,}5-0{,}67$, $\frac{Zn}{S}$ (Zinkblende) $= 1{,}9$.

Bei der extrem heteropolaren Bindung würden die Elektronenverhältnisse betragen:

$\frac{Si^{++++}}{C^{----}} = 1{,}0$ bzw. $\frac{Si^{----}}{C^{++++}} = 9{,}0$, $\frac{Al}{N} = 1{,}0$, $\frac{O}{Be} = 5$, $\frac{Zn}{S} = 1{,}55$.

Die Abweichungen von den obigen empirischen Werten liegen außerhalb der Meßfehler und auch außerhalb der Fehler, die durch Nichtberücksichtigung gewisser Einflüsse (Wärmebewegung usw.) entstehen könnten.

Nach der Tabelle A würden sich für die in Rede stehenden Verbindungen folgende Elektronenverhältnisse ergeben:

	Si/C	Al/N	O/Be	Zn/S
$k = 1$	2,33	2,42	0,89	2,36
$k = 0$	2,33	2,33	1,0	2,28

Man sieht, daß die empirischen Ergebnisse sich wenigstens qualitativ im Sinne der scheinbaren Aufladungen bewegen, wie sie in der vorliegenden Arbeit besprochen sind. Das Ergebnis von Zink-

Tabelle A.

k	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
1	− 3,60	− 2,34	− 1,16		+ 1,16	+ 2,34	+ 3,60	
1/1,5	− 3,50	− 2,30	− 1,14		+ 1,14	+ 2,30	+ 3,50	
1/2	− 3,33	− 2,20	− 1,10	Spalte des	+ 1,10	+ 2,20	+ 3,33	
1/2,5	− 3,22	− 2,14	− 1,07	Kohlen-	+ 1,07	+ 2,14	+ 3,22	Spalte der
1/3	− 3,16	− 2,10	− 1,05	stoffes	+ 1,05	+ 2,10	+ 3,16	Edelgase
1/3,5	− 3,11	− 2,08	− 1,03		+ 1,03	+ 2,08	+ 3,11	
1/4	− 3,08	− 2,06	− 1,02		+ 1,02	+ 2,06	+ 3,08	
0	− 3	− 2	− 1		+ 1	+ 2	+ 3	

Tabelle B.

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
+ 1	+ 2	+ 3	± 4	− 3	− 2	− 1	

1) Dabei steht noch offen, ob nicht etwa der reziproke Wert des Streuvermögens zu nehmen ist. Rein röntgenometrisch kann dies nicht entschieden werden, da für die Röntgenanalyse die beiden Komponenten im Gitter völlig vertauschbar auftreten. Nur wenn die Ordnungszahlen der beiden Komponenten weiter auseinanderliegen, z. B. (SiC, AlN, ZnS) wird die Annahme des reziproken Wertes widersinnig. — 2) H. Ott, Zeitschr. f. Krist. **61**, 529, 1925 u. **62**, 217, 1925. — 3) H. Ott, Zeitschr. f. Physik **22**, 212, 1924.

blende fällt indessen heraus. Im Zusammenhang mit der Zinkblende liegt es vielleicht näher, das empirische Ergebnis als das Streuverhältnis der neutralen Atome zu deuten, für welches sich folgende Werte ergeben:

$$\frac{Si}{C} = 2{,}33, \quad \frac{Al}{N} = 1{,}86, \quad \frac{O}{Be} = 2, \quad \frac{Zn}{S} = 1{,}88.$$

Natürlich würde eine exakte Berechnung des Streuvermögens verlangen, daß man in jedem Zeitmoment die gegenseitige Lage der beteiligten Elektronen bei ihrem Bahnumlauf und deren Interferenzen berücksichtigt. Dazu aber müßte man vollkommen willkürliche Annahmen über Phasenbeziehungen zwischen den Bahnen machen, die das Endresultat wesentlich beeinflussen würden. Deshalb haben wir uns hier begnügt, nur die einzelne Ellipsenbahn zu betrachten und diese in recht roher Weise zwischen den beiden Anziehungszentren aufzuteilen.

§ 3. Anhang über die Berechnung des elliptischen Integrals $\bar{y}$.

In der Keplerbewegung hängt bekanntlich die Gesamtenergie nur von der großen Achse ab und ist demnach ebenso groß, wie wenn das Elektron einen Kreis um das Attraktionszentrum beschreibt, dessen Radius $r = \xi$ der halben großen Achse der Ellipse gleich ist. Da in letzterem Falle, wenn $+p_1 e$ die anziehende Ladung ist, die Gesamtenergie

$$-\frac{p_1 e^2}{2r} = -\frac{p_1 e^2}{2\xi}$$

wird, so haben wir für die Teilbewegungen in Gl. (3)

$$A_1 = -\frac{p_1 e^2}{2\xi}, \quad A_2 = -\frac{p_2 e^2}{2\xi}.$$

Weiter folgt aus der Definition von ξ und η Gl. (6):

$$r_1 = \xi - \eta, \quad r_2 = \xi + \eta.$$

Obenstehendes in Gleichung (3a) eingesetzt, gibt für die Geschwindigkeit in einem beliebigen Punkt der Ellipse:

$$\frac{m v^2}{2 e^2} = \frac{p_1}{\xi - \eta} + \frac{p_2}{\xi + \eta} - \frac{p_1 + p_2}{2\xi}. \tag{7}$$

Transformiert man v^2 auf elliptische Koordinaten ξ, η und deren Ableitung $\dot{\eta}$ (denn ξ war konstant), so findet man:

$$v^2 = \frac{\xi^2 - \eta^2}{d^2 - \eta^2}\dot{\eta}^2,$$

was mit (7) ergibt:

$$\dot{\eta} = \sqrt{\frac{e^2(p_1 + p_2)}{m\xi}}\ \frac{\sqrt{(d^2 - \eta^2)(\eta^2 - \alpha\xi\eta + \xi^2)}}{\xi^2 - \eta^2}, \tag{8}$$

wo

$$\alpha = \frac{2(p_2 - p_1)}{p_1 + p_2}.$$

Da wir $p_2 > p_1$ angenommen haben, gilt also:

$$0 < \alpha < 2. \tag{8a}$$

Nun ist

$$\bar{\eta} = \frac{\int_0^T \eta\, dt}{T},$$

worin T die halbe Umlaufszeit des Elektrons bedeutet. Da für den Punkt M_2, in Fig. 1 $\eta = {}^1/_2 (M_2 R_2 - M_2 R_1) = -d$ und für den Punkt $M_1 = {}^1/_2 (M_1 R_2 - M_1 R_1) = +d$ ist, läßt sich $\bar{\eta}$ auch schreiben als:

$$\bar{\eta} = \frac{\int_{-d}^{+d} \eta \frac{d\eta}{\dot{\eta}}}{\int_{-d}^{+d} \frac{d\eta}{\dot{\eta}}}.$$

Wird hierin der Ausdruck (8) für $\dot{\eta}$ eingesetzt, so wird wegen $\xi/d = x$ und $\eta/d = y$:

$$\bar{y} = \frac{\int_{-1}^{+1} y \frac{(x^2 - y^2)\, dy}{\sqrt{(1 - y^2)(y^2 - \alpha x y + x^2)}}}{\int_{-1}^{+1} \frac{(x^2 - y^2)\, dy}{\sqrt{(1 - y^2)(y^2 - \alpha x y + x^2)}}}. \tag{9}$$

Aus den Grenzen (8a) von α ergibt sich leicht, daß die Wurzeln a_3 und a_4 der Gleichung

$$y^2 - \alpha x y + x^2 = 0$$

komplex sind.

Wir suchen nun zuerst, eine lineare Transformation zu finden derart, daß:

$$\frac{dy}{\sqrt{-(y+1)(y-1)(y-a_3)(y-a_4)}} = C\frac{du}{\sqrt{(B^2 - u^2)(u^2 + A^2)}}$$

wird, wo A, B und C Konstanten bedeuten.

Der Satz des konstanten Doppelverhältnisses der Verzweigungsstellen:

$$(-1, +1, a_3, a_4) = (-B, +B, -iA, +iA)$$

liefert uns die Beziehung, die dann notwendig zwischen A und B bestehen muß:

$$\frac{iA}{B} = \frac{\sqrt{(a_3 - 1)(a_4 + 1)} + \sqrt{(a_3 + 1)(a_4 - 1)}}{\sqrt{(a_3 - 1)(a_4 + 1)} - \sqrt{(a_3 + 1)(a_4 - 1)}}. \tag{10}$$

Bedenken wir noch, daß

$$a_3 + a_4 = -\alpha x, \quad a_3 a_4 = x^2, \tag{11}$$

so finden wir leicht:

$$\frac{A^2}{B^2} = \frac{(s+v)^2 - 4}{4 - (s-v)^2} \tag{12}$$

mit den Abkürzungen:

$$s = \sqrt{1 + \alpha x + x^2}, \quad v = \sqrt{1 - \alpha x + x^2}.$$

Die gesuchte Transformation $y \to u$ ist dann enthalten in:

$$(y, +1, a_3, a_4) = (u, B, -iA, +iA),$$

was mit Rücksicht auf (10), (11) und (12) ergibt:

$$y = \frac{B + \dfrac{s+v}{s-v}\, u}{B\,\dfrac{s+v}{s-v} + u}.$$

Da die Wahl von B noch frei ist, setzen wir:

$$B = \frac{s-v}{s+v},$$

damit die Transformation so einfach wie möglich wird. Sie lautet dann:

$$y = \frac{p + qu}{1 + u}$$

mit

$$p = \frac{s-v}{s+v}, \quad q = \frac{s+v}{s-v}.$$

Wir haben nun noch $y(x^2 - y^2)$ bzw. $x^2 - y^2$ im Zähler und Nenner von $\bar{y}$ (Gl. 9)) durch die neue Variabele u auszudrücken.

Da die Integrationsgrenzen $y = -1$, $y = +1$ mit $u = -B$, $u = +B$ korrespondieren, wird, wenn der Integrand in Zähler und Nenner in eine gerade und eine ungerade Funktion von u zerlegt wird, nur die erstere zu berücksichtigen sein.

Man erhält auf diese Weise:

$$\bar{y} = \frac{\displaystyle\int_0^B \left[P + \frac{Q}{1-u^2} + \frac{R}{(1-u^2)^2} + \frac{S}{(1-u^2)^3}\right] \frac{du}{\sqrt{(B^2-u^2)(A^2+u^2)}}}{\displaystyle\int_0^B \left[P' + \frac{Q'}{1-u^2} + \frac{R'}{(1-u^2)^2}\right] \frac{du}{\sqrt{(B^2-u^2)(A^2+u^2)}}},$$

mit:

$$\begin{aligned} P &= q(x^2 - q^2) & P' &= x^2 - q^2 \\ Q &= (p-q)(x^2 + 3pq - 6q^2) & Q' &= (p-q)(p-3q) \\ R &= 3(p-q)^2(p-3q) & R' &= -2(p-q)^2 \\ S &= -4(p-q)^3 \end{aligned}$$

Wir schreiben nun weiter:

$$\left[P + \frac{Q}{1-u^2} + \frac{R}{(1-u^2)^2} + \frac{S}{(1-u^2)^3}\right] \frac{1}{\sqrt{(B^2-u^2)(u^2+A^2)}} =$$

$$= \xi_1 \frac{1-u^2}{\sqrt{(u^2+A^2)(B^2-u^2)}} + \xi_2 \frac{1}{\sqrt{(u^2+A^2)(B^2-u^2)}} + \xi_3 \frac{1}{(1-u^2)\sqrt{(u^2+A^2)(B^2-u^2)}} +$$

$$+ \frac{d}{du}\left(\frac{(\xi_4 u + \xi_5 u^3)\sqrt{(u^2+A^2)(B^2-u^2)}}{(1-u^2)^2}\right),$$

worin die unbekannten Koeffizienten $\xi_1 \ldots \xi_5$ mittels der Identitätsbedingungen für rechtes und linkes Glied nach Ausführung der Differentiation zu bestimmen sind. So wird z. B.

$$\xi_1 = -\frac{R}{2(1+A^2)(1-B^2)} - \frac{3S}{8(1+A^2)(1-B^2)}\left[2 + \frac{1+A^2B^2}{(1+A^2)(1-B^2)}\right],$$

$$\xi_2 = P + \frac{S}{4(1+A^2)(1-B^2)},$$

$$\xi_3 = Q + R + S + (A^2B^2 - 1)(\xi_2 - P) - (A^2B^2 + 1)\xi_1.$$

Analog setzen wir an:

$$\left[P' + \frac{Q'}{1-u^2} + \frac{R'}{(1-u^2)^2}\right] \frac{1}{\sqrt{(B^2-u^2)(u^2+A^2)}} =$$

$$= \xi_1' \frac{1-u^2}{\sqrt{\quad}} + \xi_2' \frac{1}{\sqrt{\quad}} + \xi_3' \frac{1}{(1-u^2)\sqrt{\quad}} + \frac{d}{du}\left(\frac{(\xi_4' u + \xi_5' u^3)\sqrt{\quad}}{(1-u^2)^2}\right)$$

und bestimmen ebenso:

$$\xi_1' = -\frac{R'}{2(1+A^2)(1-B^2)},$$
$$\xi_2' = P',$$
$$\xi_3' = Q' + \frac{R'}{2}\left[2 + \frac{1+A^2B^2}{(1+A^2)(1-B^2)}\right].$$

Werden nun beide Gleichungen nach u von o bis B integriert, so verschwinden die Terme mit ξ_4, ξ_5 und ξ_4', ξ_5'.

Der folgende Schritt ist dann der, daß die Integrale:

$$\int_0^B \frac{(1-u^2)\,du}{\sqrt{(B^2-u^2)(u^2+A^2)}}, \qquad (13)$$

$$\int_0^B \frac{du}{\sqrt{(B^2-u^2)(u^2+A^2)}}, \qquad (14)$$

$$\int_0^B \frac{du}{(1-u^2)\sqrt{(B^2-u^2)(u^2+A^2)}} \qquad (15)$$

auf elliptische Integrale in der Normalform zurückgeführt werden.

Nach dem Satz des konstanten Doppelverhältnisses läßt sich wieder leicht die Transformation finden, die die beiden ersten Integrale in der gewünschten Weise umformen[1]), nämlich:

$$u = B\sqrt{1-z^2} \text{ mit } z = \sin\varphi.$$

Dies führt zu:

$$(13) = \frac{A^2+1}{\sqrt{A^2+B^2}} F\left(\varkappa, \frac{\pi}{2}\right) - \sqrt{A^2+B^2}\, E\left(\varkappa, \frac{\pi}{2}\right),$$

$$(14) = \frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}} F\left(\varkappa, \frac{\pi}{2}\right),$$

mit

$$\varkappa^2 = \frac{B^2}{A^2+B^2}.$$

Auf das dritte Integral angewandt, ergibt sie:

$$(15) = \frac{1}{(1-B^2)\sqrt{A^2+B^2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\left(1 + \frac{B^2}{1-B^2}\sin^2\varphi\right)\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\varphi}}.$$

Letzteres Integral kann als vollständiges elliptisches Integral dritter Gattung mittels der Formel von Legendre (Legendre, Traité des fonctions elliptiques Tome I, p. 134) durch vollständige und unvollständige elliptische Integrale erster und zweiter Art ausgedrückt werden. Diese Formel lautet in unserer Schreibweise:

$$\frac{\sqrt{1-\varkappa_1^2\sin^2\Theta}}{\sin\Theta\cos\Theta} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\left(1 + \frac{B^2}{1-B^2}\sin^2\varphi\right)\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\varphi}} =$$
$$= \frac{\pi}{2} + \operatorname{tg}\Theta \cdot \sqrt{1-\varkappa_1^2\sin^2\Theta}\, F\left(\varkappa, \frac{\pi}{2}\right) + F\left(\varkappa, \frac{\pi}{2}\right) F(\varkappa_1, \Theta) -$$
$$- F\left(\varkappa, \frac{\pi}{2}\right) E(\varkappa_1, \Theta) - E\left(\varkappa, \frac{\pi}{2}\right) F(\varkappa_1, \Theta)$$

mit: $\varkappa_1^2 = 1-\varkappa^2$, $\operatorname{cotg}^2\Theta = \frac{B^2}{1-B^2}$.

Nach Einsetzung all dieser Resultate in Zähler und Nenner von $\bar{y}$ findet man:

$$\bar{y} = \frac{C_1 F\left(\varkappa, \frac{\pi}{2}\right) + C_2 E\left(\varkappa, \frac{\pi}{2}\right) + C_3[\cdots]}{C_1' F\left(\varkappa, \frac{\pi}{2}\right) + C_2' E\left(\varkappa, \frac{\pi}{2}\right) + C_3'[\cdots]},$$

worin:

$$[\cdots] = \frac{\pi}{2} + F\left(\varkappa, \frac{\pi}{2}\right)\left|F(\varkappa_1, \Theta) - E(\varkappa_1, \Theta)\right| - E\left(\varkappa, \frac{\pi}{2}\right) F(\varkappa_1, \Theta).$$

In besonderen Fällen läßt sich der Ausdruck für $\bar{y}$ vereinfachen, z. B. für $x = 1$, was der in eine Gerade entarteten Ellipse („Pendelbahn") entspricht. Für diesen Wert von x können die

---

1) Man könnte mit demselben Satz auch direkt auf $\frac{dy}{\sqrt{-(y+1)(y-1)(y-a_3)(y-a_4)}}$ $\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-x^2z^2)}}$ bringen, dann würde aber die Transformation von $y(x^2-y^2)$ und x^2-y^2 dermaßen kompliziert, daß von einer leichten Berechnung der Koeffizienten bei dem später gleichfalls benötigten Identitätsforderungen nicht die Rede sein könnte.

Ausdrücke für s, v, p, q, A, B usw. leicht bestimmt werden, am besten drückt man nun alles in p aus und findet dann:

$$(\bar{y})_{x=1} = \frac{p(p^2-5)F\left(\frac{1}{2}\sqrt{2},\frac{\pi}{2}\right)+6pE\left(\frac{1}{2}\sqrt{2},\frac{\pi}{2}\right)+(p^4-4p^2+1)\sqrt{\frac{2}{1-p^4}}[I]}{-2(p^2+1)F\left(\frac{1}{2}\sqrt{2},\frac{\pi}{2}\right)+2(p^2+1)E\left(\frac{1}{2}\sqrt{2},\frac{\pi}{2}\right)-2p(p^2+1)\sqrt{\frac{2}{1-p^4}}[I]},$$

mit der Abkürzung:

$$[I] = \frac{\pi}{2}+F\left(\frac{1}{2}\sqrt{2},\frac{\pi}{2}\right)\left\{F\left(\frac{1}{2}\sqrt{2},\psi\right)-E\left(\frac{1}{2}\sqrt{2},\psi\right)\right\}-E\left(\frac{1}{2}\sqrt{2},\frac{\pi}{2}\right)F\left(\frac{1}{2}\sqrt{2},\psi\right),$$

wo:

$$\psi = \text{Arc. cos}\cdot p \quad \text{und} \quad p = \frac{\sqrt{p_2}-\sqrt{p_1}}{\sqrt{p_2}+\sqrt{p_1}}:$$

Der Ausdruck bleibt also elliptisch, nur treten jetzt die sogenannten lemniscatischen Funktionen auf.

Daß weiter:

für $p_2 = 0$ $\quad \bar{y} = \frac{1}{2x}$,

„ $p_1 = p_2$ $\quad \bar{y} = 0$,

„ $x = \infty$ $\quad \bar{y} = 0$

wird, bemerkt man am leichtesten an der Formel für $\bar{y}$, Gl. (9). Ich habe sie jedoch außerdem aus der Endformel für $\bar{y}$ abgeleitet, um mich von der Richtigkeit der letzteren zu überzeugen.

Zum Schluß bemerken wir noch, daß bei der Berechnung von $\bar{y}$ die Ladungen $p_1 e$ und $p_2 e$ nur insofern von Einfluß waren, als durch sie

$$\alpha = 2\frac{p_2-p_1}{p_1+p_2} = 2\frac{\frac{p_2}{p_1}-1}{\frac{p_2}{p_1}+1}$$

bestimmt wurde, wie aus derselben Gl. (9) für $\bar{y}$ hervorgeht. Wir konnten also behaupten, daß die Parameter p_1 und p_2 nur in ihrem Verhältnis in den Wert für $\bar{y}$ eingehen.

Herrn Professor Sommerfeld möchte ich für die Anregung zu dieser Arbeit sowie für einige Anweisungen bei der Rechnung in § 3 auch hier bestens danken.

Ferner sage ich der Rockefeller-Stiftung ergebensten Dank, daß sie mir den Aufenthalt in München ermöglicht hat.

Utrecht, z. Z. München, Institut für theoretische Physik.

(Eingegangen 27. Februar 1926.)

Das Ehrenfestsche Modell der H-Kurve.

Von K. W. F. Kohlrausch und E. Schrödinger.

Im Jahre 1907 haben P. und T. Ehrenfest in dieser Zeitschrift[1]) zur Illustration des Verlaufes der Boltzmannschen H-Kurve ein Spielschema vorgeschlagen; an der Hand der den Spielverlauf darstellenden „Treppenkurve" lassen sich in ungemein anschaulicher Weise jene begrifflichen oder, besser gesagt, geometrischen Schwierigkeiten besprechen und aufklären, die seinerzeit zu den bekannten, gegen das Boltzmannsche Theorem erhobenen „Umkehr"- und „Wiederkehr"-Einwänden geführt haben. Wegen ihres großen Anschaulichkeitswertes dürfte die Ehrenfestsche Überlegung wohl in den meisten Vorlesungen ein willkommenes Lehrbeispiel bilden und hat auch Eingang in die Lehrbücher[2]) gefunden. Unter diesen Umständen mag es daher von Wert sein, wenn im folgenden die Ergebnisse einer ursprünglich zu anderen Zwecken durchgeführten Urnenziehung mitgeteilt werden, die nach der Ehrenfestschen Vorschrift bearbeitet und mit der Theorie dieser Wahrscheinlichkeitsaufgaben verglichen wurden.

1) P. u. T. Ehrenfest, Physik. Zeitschr. 8, 311, 1907.
2) Vgl. z. B. Cl. Schäfer, Einführung in die theor. Physik, II/1, S. 415 ff.

§ 1. Die Ziehung und ihre Bearbeitung.

Die Spielvorschrift lautet: „Es seien N Kugeln fortlaufend numeriert über zwei Urnen verteilt. Die Urne A enthalte n, die Urne B $m = N - n$ Kugeln. Doch sei nicht bekannt, welche individuellen Kugeln in jeder Urne liegen. Überdies befinden sich in einem Sacke N Lotteriezettel mit den Nummern 1 bis N. Nach je einer Zeiteinheit wird ein Zettel gezogen und zurückgelegt. Jedesmal wenn eine Nummer gezogen wird, hüpft eine Kugel mit dieser Nummer aus der Urne, in der sie gerade liegt, in die andere Urne und bleibt dort so lange liegen, bis gelegentlich wieder ihre Nummer gezogen wird"[1]).

Zur Realisierung dieser Vorschrift wurde aus einem Sacke, der zur Vermeidung von „toten"

1) Zitiert nach Ehrenfest, l. c.

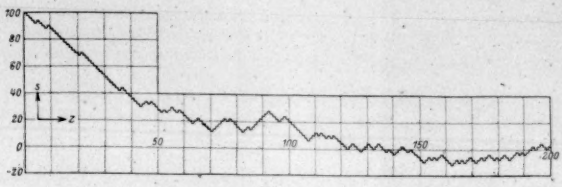


Fig. 1.

Ecken runden Boden hatte und $N = 100$ nur durch ihre Bezifferung verschiedene Steine (zusammengestellt aus den käuflichen Lottospielen) enthielt, $Z = 5000$ Ziehungen vorgenommen. Die gezogene Nummer wurde notiert, der Stein zurückgelegt, und der Sackinhalt vor der nächsten Ziehung gut durchgerührt. Das so erhaltene Zahlenmaterial, das der verschiedensten Verwendung fähig ist, wurde unter anderem für die vorliegende Aufgabe in folgender Art bearbeitet. Im Beobachtungsjournal wurde jeder einzelne der notierten Steine fortlaufend numeriert, so daß bei jedem sofort ersichtlich ist, zum wievieltenmal er seit Ziehungsbeginn gezogen wurde. Als Beispiel die ersten 10 Ziehungen:

1.	Ziehungsergebnis:	64,	19,	68,	72,	72,	36,	79,	10,	68,	51;
2.	Numerierung:	1,	1,	1,	1,	2,	1,	1,	1,	2,	1;
3.	n:	1,	2,	3,	4,	3,	4,	5,	6,	5,	6.

Die 3. Zeile gibt den Inhalt n der Urne A, wenn bei Ziehungsbeginn sämtliche N „Kugeln" in Urne B gedacht werden. Denn wenn eine Kugel zum erstenmal aufgerufen wird, muß sie von B nach A, A gewinnt eine Kugel. Wird dieselbe Kugel zum zweitenmal aufgerufen, so muß sie von A nach B, A verliert eine Einheit. Allgemein wird n um eine Einheit größer oder kleiner, je nachdem Zeile 2 eine ungerade oder gerade Ziffer aufweist. Die Urnendifferenz ist gegeben als $s = N - 2n$. Tabelle I enthält den

Tabelle I.

Der Gang von $s = N - 2n$ in den ersten 200 Zügen; zu Beginn $s = 100$. —

	6	94	92	94	92	90	88	90	88
	4	82	80	78	76	74	72	70	68
	8	66	64	62	60	58	56	54	52
50	48	46	44	42	44	42	40	38	36
34	32	30	32	34	32	34	32	30	28
30	28	26	28	30	28	26	28	26	24
2	26	18	20	22	20	18	16	14	12
14	1	18	20	22	20	22	20	18	16
14	1	14	16	14	16	18	20	22	24
26	1	26	24	22	20	22	24	22	20
18	16	14	12	10	8	6	8	10	12
10	12	10	8	10	8	10	8	6	4
4	0	2	4	2	0	− 2	0	2	4
2	0	2	4	2	0	− 2	0	− 2	− 4
− 2	0	2	0	− 2	0	− 2	− 4	− 6	− 8
− 10	− 8	− 6	− 8	− 6	− 8	− 6	− 4	− 6	− 8
− 10	− 12	− 10	− 8	− 10	− 8	− 10	− 8	− 6	− 8
− 10	− 8	− 6	− 8	− 6	− 4	− 6	− 8	− 6	− 8
− 6	− 4	− 6	− 8	− 6	− 4	− 2	− 4	− 2	− 4
− 2	0	2	0	2	4	2	0	2	0

Gang von s für die ersten $z = 200$ Ziehungen. Vielleicht kann der eine oder andere Kollege diese Angaben zur Herstellung eines Diapositives für Vorlesungszwecke verwenden. Fig. 1 zeigt diesen Anfang der Treppenkurve bildlich.

§ 2. Die Theorie des Problems.

A. Der stationäre Zustand.

Wie groß ist, nachdem hinreichend viel Züge jegliche Nachwirkung eines etwa bekannten Anfangszustandes verwischt haben[1]), die Wahrscheinlichkeit w_k, daß Urne A um k Steine mehr als $R = \frac{1}{2}N$ (N gerade)[2]) enthält, daß also eine Urnendifferenz $s = 2k$ angetroffen wird?

Der Zustand k kann nur folgende zwei Fälle als unmittelbare Entstehungsgeschichte haben: entweder es war einen Zug vorher der Zustand $k - 1$, oder er war $k + 1$. Im ersten Falle enthielt Urne A: $R + k - 1$, Urne B: $R - k + 1$ Steine, und es mußte, um nach k zu kommen, ein Stein aus B gezogen werden $\left(\text{Zugswahrscheinlichkeit } \frac{R - k + 1}{2R}\right)$. Im zweiten Fall, bei dem in A: $R + k + 1$ Steine enthalten waren und ein Stein aus A gezogen werden mußte, war die Zugswahrscheinlichkeit $\frac{R + k + 1}{2R}$.

1) Ob dies der Fall ist, hängt natürlich auch von der Zahl der Steine ab. z muß merklich größer sein als N.

2) Die Voraussetzung: N gerade, ist für die Durchführung der Theorie unwesentlich, möge aber im Anschluß an die mit $N = 100$ durchgeführten Versuche festgehalten werden, damit k, die Abweichung von der Gleichverteilung, eine ganze Zahl sei.

Daraus folgt der Ansatz:

$$w_k = w_{k-1}\frac{R-k+1}{2R} + w_{k+1}\frac{R+k+1}{2R}. \quad (1)$$

Da aus Symmetriegründen $w_{-k} = w_{+k}$ sein muß, ergibt sich zunächst aus (1) für w_0, w_1, w_2 usw.:

$$w_0 = w_{-1}\frac{R+1}{2R} + w_{+1}\frac{R+1}{2R},$$

$$\text{daher: } w_1 = \frac{R}{R+1}\cdot w_0,$$

$$w_1 = w_0\frac{R}{2R} + w_2\frac{R+2}{2R},$$

$$\text{daher: } w_2 = \frac{R(R-1)}{(R+1)(R+2)}\cdot w_0,$$

— — — — — — — — — — —

allgemein:

$$w_k = \frac{R(R-1)\cdots(R-k+1)}{(R+1)(R+2)\cdots(R+k)}\cdot w_0 =$$

$$= \frac{R!}{(R-k)!}\cdot\frac{R!}{(R+k)!}w_0 = \binom{2R}{R-k}\frac{R!\,R!}{(2R)!}\cdot w_0. \quad (2)$$

Da das System irgendeinen der Werte von $k = -R$ bis $k = +R$ haben muß, so folgt:

$$\sum_{-R}^{+R} w_k = 1 = \frac{R!\,R!}{(2R)!}w_0\sum_{-R}^{+R}\binom{2R}{R-k} =$$

$$= \frac{R!\,R!}{(2R)!}w_0(1+1)^{2R}.$$

Hieraus w_0 berechnet und in (2) eingesetzt, ergibt:

$$w_k = \left(\frac{1}{2}\right)^{2R}\frac{(2R)!}{(R+k)!\,(R-k)!} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2R}\binom{2R}{R+k}. \quad (3)$$

Man erhält also für den stationären Fall des vorliegenden Problemes dieselbe Form der Wahrscheinlichkeitsfunktion, wie sie für das folgende Spiel gelten würde: Aus einer Urne mit einer geraden Anzahl von Steinen, deren eine Hälfte schwarz, die andere weiß ist, wird unter Zurücklegen gezogen. Nach einem weißen Zugsergebnis erhält der Spieler A eine Münze, nach einem schwarzen der Spieler B. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit w'_k, daß nach z Zügen der Spieler A um k Münzen mehr als $R' = \frac{1}{2}z$ besitzt. Da offenbar $R'+k$ weiße und $R'-k$ schwarze Züge stattgefunden haben, da für jedes Zugsergebnis die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ und da die Reihenfolge gleichgültig ist, so folgt:

$$w'_k = \left(\frac{1}{2}\right)^{2R'}\frac{(2R')!}{(R'+k)!\,(R'-k)!}. \quad (4)$$

Der wesentliche Unterschied in der Bedeutung zwischen (3) und (4) ist, daß R nur von der Spieleinrichtung ($2R = N$, Zahl der verfügbaren Lottonummern), R' nur von der Spielzeit ($2R' = z$, Zahl der Züge) abhängt. Anderseits ist die formale Übereinstimmung von (3) und (4) leicht verständlich durch folgende Überlegung, welche vielleicht die kürzeste Ableitung der Formel (3) darstellt. Bei dem Spiel zwischen den Urnen A und B mit $2R$ Steinen ist offenbar nach sehr vielen Zügen für einen bestimmten Stein die Wahrscheinlichkeit gleich groß, sich in A oder in B zu befinden. Denn es ist ja offenbar nach vielen Zügen gleichwahrscheinlich, daß der Stein eine gerade oder eine ungerade Anzahl von Malen „gerufen" worden ist. Das nämliche gilt von jedem der $2R$ Steine. Es ist also so gut, als hätten die zwei Urnen über den Besitz eines jeden der $2R$ Steine durch je ein Spiel zu gleichen Chancen entschieden. Das aber ist genau die Wahrscheinlichkeitsstruktur des Spieles zwischen den beiden Spielern A und B, auf das sich die Formel (4) bezieht.

Es ist aus der Theorie des Bernouillischen Theorems bekannt und im übrigen leicht direkt zu verifizieren, daß der Mittelwert

$$\bar{k} = \sum k w_k = 0$$

ist, während das mittlere Quadrat der Abweichung von diesem Mittelwert

$$\varepsilon^2 = \sum w_k (k-\bar{k})^2 = \frac{2R}{4} = \frac{R}{2}.$$

Für große Werte von $2R$ und $R+k$ geht (3) mit Hilfe der Stirlingschen Formel bekanntlich über in die Gaußsche Fehlerverteilung:

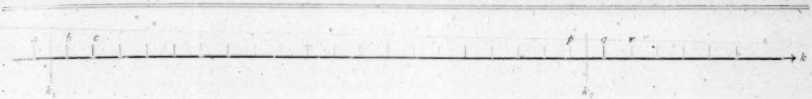
$$w_k = \frac{1}{\sqrt{\pi R}}e^{-\frac{k^2}{R}}. \quad (5)$$

B. Der nichtstationäre Fall. Näherungsformeln.

Wesentlich verwickelter ist der Wahrscheinlichkeitszusammenhang, solange der Einfluß des Anfangszustandes noch nicht durch hinreichend viele Züge ausgeschaltet ist. Sei $w(k_0, k, z)$ die Wahrscheinlichkeit dafür, daß in z Zügen der Inhalt der Urne A, wenn er vor dem ersten Zug $R+k_0$ betragen hat, sich gerade auf $R+k$ ändere. Aus der Überlegung, daß dem Wert k stets einer der beiden Werte $k\pm 1$ vorhergegangen sein muß, ergibt sich leicht die zu (1) analoge Rekursionsformel

$$w(k_0, k, z) = w(k_0, k-1, z-1)\frac{R-k+1}{2R} + w(k_0, k+1, z-1)\frac{R+k+1}{2R}, \quad (6)$$

welche $w(k_0, k, z)$ für beliebige endliche Werte der Argumente prinzipiell zu berechnen gestattet.



Die Zusammenfassung dieser Rekursion zu einer geschlossenen Formel ist uns nicht gelungen. Doch läßt sich leicht eine Näherungsformel gewinnen unter der Voraussetzung, daß w durch eine stetige Funktion seiner stetig veränderlich gedachten Argumente approximiert werden darf. Das wird erlaubt sein, wenn sowohl die Zahl der Züge z als auch die Zahl der Steine $(2R)$ einigermaßen große Zahlen sind, ohne daß jedoch z gegen R so groß zu sein braucht, daß die Nachwirkung des Anfangszustandes verwischt wird (vgl. die Anmerkung 1 auf S. 307). Dabei muß man sich auch über die prinzipielle Unstetigkeit hinwegsetzen, die darin liegt, daß w immer Null ist, wenn $z + k - k_0$ eine ungerade Zahl ist — also bei gegebenen Werten zweier Argumente für alternierende Werte des dritten.

Um die Näherungsformel zu gewinnen, denken wir uns eine sehr große Anzahl L von Urnenpaaren A, B, die, jede zu einem anderen Spieltisch gehörig, ihre Inhalte nach der eingangs gegebenen Spielregel ändern; für alle Systeme sei R und das Zugstempo identisch. Der Anfangszustand des Urnensystems sei statistisch bekannt, d. h. es sei die Häufigkeitsverteilung entlang einer k-Achse zu Anfang bekannt. Es habe bereits eine Anzahl von Zügen stattgefunden und nun seien die Punkte $a, b, c, \cdots p, q, r \cdots$ der Zustandsgeraden mit den Häufigkeiten $H_a H_b \cdots$ besetzt, d. h. von allen „A-Urnen" (auf die wir das Augenmerk beschränken können) sollen ihrer H_a den Inhalt $R + a$ aufweisen usw. Durch zwei Grenzen $k_1 = a + \frac{1}{2} = b - \frac{1}{2}$ und k_2 in der Mitte zwischen ab bzw. pq grenzen wir ein Zustandsgebiet k_1 bis k_2 ab und fragen, um wieviel wird sich in weiteren ξ Zügen die Gesamtbesetzung $H_b + \cdots + H_p$ ändern. Da die Wahrscheinlichkeit, daß ein System, wenn es in a ist, nach b geht, durch $\dfrac{R - k_1 + \frac{1}{2}}{2R}$, für den umgekehrten Weg durch $\dfrac{R + k_1 + \frac{1}{2}}{2R}$ gegeben ist, so ist die Differenz der bei k_1 in ξ Zügen ein- und auswandernden Urnen:

$$\xi H_a \frac{R - k_1 + \frac{1}{2}}{2R} - \xi H_b \frac{R + k_1 + \frac{1}{2}}{2R} =$$
$$= \xi \frac{R + \frac{1}{2}}{2R} (H_a - H_b) - \xi \frac{k_1}{2R} (H_a + H_b),$$

analog bei k_2:

$$- \xi \frac{R + \frac{1}{2}}{2R} (H_p - H_q) + \xi \frac{k_2}{2R} (H_p + H_q).$$

Wir vernachlässigen nun erstens $\frac{1}{2}$ gegen das, sehr groß gedachte, R und sehen H als kontinuierliche Funktion von k an, d. h. setzen

$$H_a - H_b = -\left(\frac{\partial H}{\partial k}\right)_1; \quad H_a + H_b = 2H_1$$

für die untere Grenze k_1 und analog für die obere Grenze k_2; so daß die Summe der Einwanderung an beiden Grenzen durch

$$\xi \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial H}{\partial k}\right)_2 - \left(\frac{\partial H}{\partial k}\right)_1\right] + \xi \frac{1}{R}[H_2 k_2 - H_1 k_1]$$

gegeben ist. Wir fassen nun weiter auch $k_2 - k_1$ als Elementargebiet dk auf. Der erste Klammerausdruck wird dann zu $\dfrac{\partial^2 H}{\partial k^2} dk$; der zweite zu $\dfrac{\partial k H}{\partial k} dk$.

Diese gesamte Änderung der Besetzung des Zustandsgebietes k, $k + dk$ in ξ Zügen setzen wir gleich ξdk mal dem Differentialquotienten von H nach z:

$$\frac{\partial H}{\partial z} \cdot \xi \cdot dk = \xi \cdot dk \cdot \left[\frac{1}{2}\frac{\partial^2 H}{\partial k^2} + \frac{1}{R}\frac{\partial k H}{\partial k}\right].$$

Da für genügend großes L nach der Wahrscheinlichkeitsdefinition $H = L \cdot w$ gilt, so ergibt sich endgültig:

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial k^2} + \frac{1}{R}\frac{\partial k w}{\partial k}. \qquad (7)$$

Damit ist ebenso, wie durch (3) der Anschluß an Bekanntes erreicht. (7) ist die Differentialgleichung für ein suspendiertes Teilchen, das einer Brownschen Bewegung mit dem Diffusionskoeffizienten $D = \frac{1}{2}$ und einer zur Mittellage $k = 0$ hinziehenden elastischen Kraft $-\dfrac{1}{R} k$ unterworfen ist. Da die Theorie dieser Gleichung schon mehrfach in der Literatur behandelt wurde[1]), genügt es, die Ergebnisse anzuführen: Die Lösung für den Fall, daß für $z = 0$ der Wert $k = k_0$ bekannt war, also die Wahrscheinlichkeit, daß das von k_0 ausgehende System nach z Zügen zwischen k und $k + dk$ angetroffen wird, ist gegeben durch:

1) Vgl. M. v. Smoluchowski, Ann. d. Phys. (4) **48**, 1105, 1915; Göttinger Vorträge 1913; E. Schrödinger, Wien. Ber. (IIa) **127**, 237, 1918; **128**, 177, 1919; E. Bormann, Wien. Ber. (IIa), **127**, 2347, 1918.

$$w(k_0,k,z)\,dk = \left| \frac{1}{\pi R\left(1-e^{-\frac{2z}{K}}\right)} \cdot e^{-\frac{\left(k-k_0e^{-\frac{z}{K}}\right)^2}{R\left(1-e^{-\frac{2z}{K}}\right)}} dk. \right| \qquad (8)$$

Es ist dies genau diejenige Näherung für den nichtstationären Fall, welche dem am Ende des Abschnittes A für den stationären Fall gefundenen Gaußschen Fehlergesetz (5) entspricht: eine Gaußsche Fehlerverteilung mit zeitlich (z) variierendem Schwerpunkt und gegen einen Grenzwert zunehmender „Dispersion". Der Mittelwert von k und das mittlere Quadrat der Abweichung von diesem Mittelwert sind leicht zu berechnen, am einfachsten durch die Bemerkung, daß $k-k_0e^{-\frac{z}{K}}$, mit w multipliziert und über das ganze Wertegebiet (von $-\infty$ bis $+\infty$) integriert, wie ein Blick lehrt, Null ergibt, also

$$\overline{k} = k_0 e^{-\frac{z}{K}}, \qquad (9)$$

während man für den Mittelwert des Quadrates jener Differenz findet

$$\varepsilon^2 = \overline{(k-\overline{k})^2} = \frac{R}{2}\left(1-e^{-\frac{2z}{K}}\right). \qquad (10)$$

C. Nichtstationärer Fall. Exakte Formeln für die Mittelwerte.

Für die Mittelwerte (9) und (10) lassen sich auch die exakten Ausdrücke verhältnismäßig leicht angeben.

Es empfiehlt sich zu dem Zweck vorübergehend auf die Bezeichnungsweise von § 1 zurückzugreifen. Wir nennen also jetzt N (bisher $2R$) die Gesamtzahl der Steine, über deren Geradheit wir jetzt besser nichts voraussetzen. Ferner sei n_0 (bisher $R+k_0$) die anfängliche Zahl der Steine in der Urne A und n (bisher $R+k$) ihre Anzahl nach z Zügen.

Gesucht sei zunächst bei gegebenem n_0 und z der Mittelwert $\overline{n}$, gemittelt über alle erdenklichen Ziehungsergebnisse der z Züge. Wir richten unser Augenmerk auf einen individuellen Stein, etwa Stein Nr. 67, der sich zu Anfang in der Urne A befand. Wir fragen: wieviel trägt dieser Stein zu $\overline{n}$ bei? Nun: er trägt zu n (nicht gemittelt) jedesmal die Einheit bei, wenn er sich nach den z Zügen in A befindet; andernfalls nichts. Sein Beitrag zu $\overline{n}$ (gemittelt) wird also gleich sein der Chance, die er hat, sich nach z Zügen in A zu befinden. Diese Chance — wir sprechen immer noch von unserem individuellen Stein Nr. 67 — ist aber gleich der Wahrscheinlichkeit, die er hat, eine gerade Anzahl von Malen gerufen zu werden. Und diese ist, wie man leicht überlegt:

$$\sigma_1 = \sum_{l=0}^{2l\le z} q^{2l}(1-q)^{z-2l}\binom{z}{2l},$$

wo zur Abkürzung

$$q = \frac{1}{N}. \qquad (11)$$

Da nun diese, den einen individuellen Stein betreffende Überlegung vollkommen exakt ist und da, ebenso sicher, jeder von den n_0 Steinen, die sich anfangs in A befunden haben, denselben durchschnittlichen Beitrag zu $\overline{n}$ liefern muß, so ist der Gesamtbeitrag dieser n_0 Steine zu $\overline{n}$:

$$n_0\sigma_1.$$

Ganz ebenso schließt man, daß die $N-n_0$ Steine, die sich anfangs nicht in Urne A befanden, zu $\overline{n}$ den Beitrag

$$(N-n_0)(1-\sigma_1)$$

liefern. Folglich ist

$$\overline{n} = n_0\sigma_1 + (N-n_0)(1-\sigma_1).$$

Man erkennt leicht aus der Binomialreihe, daß

$$\sigma_1 = \tfrac{1}{2}\{[1-q)+q]^z + [(1-q)-q]^z\},$$
$$\sigma_1 = \tfrac{1}{2}[1+(1-2q)^z],$$
$$1-\sigma_1 = \tfrac{1}{2}[1-(1-2q)^z].$$

Mithin

$$\overline{n} = \frac{N}{2} + \left(n_0 - \frac{N}{2}\right)(1-2q)^z = \left| = \frac{N}{2} + \left(n_0 - \frac{N}{2}\right)\left(1-\frac{2}{N}\right)^z. \right| \qquad (12)$$

Das Verfahren läßt sich auf den quadratischen Mittelwert übertragen. Wie gewöhnlich empfiehlt es sich, nicht auf $\overline{n}^2$, sondern auf $\overline{n(n-1)}$ auszugehen. Wir denken uns das Produkt $n(n-1)$ folgendermaßen aufgelöst:

$$n(n-1) = \underbrace{(1+1+1\cdots+1)}_{(n\text{ Einser})} - \underbrace{(1+1+1\cdots+1)}_{(n\text{ Einser})},$$

wobei die Einser die Einzelindividuen (Steine) repräsentieren sollen, die sich nach einem bestimmten Ergebnis der z Züge in A befinden. Indem man ausquadriert und jedes $1^2=1$ fortstreicht, erkennt man, daß zu $n(n-1)$ nicht die Einzelindividuen, sondern die Individuenpaare, die sich in A befinden, Beiträge liefern, und zwar liefert jedes der $n(n-1)/2$ Individuenpaare zu $n(n-1)$ den Beitrag 2.

Richten wir nun unser Augenmerk aus-

schließlich auf ein bestimmtes Steinepaar, sagen wir Nr. 67 und Nr. 25, welche Steine sich zu Anfang des Versuches beide in A befunden haben mögen. Der Beitrag dieses Steinpaars zu $n(n-1)$ wird gleich sein 2 mal der Chance, die dieses Steinepaar besitzt, sich nach den z Zügen wieder in der Urne A vereint zu finden. Dieser Fall tritt dann und nur dann ein, wenn sowohl der eine als auch der andere Stein eine gerade Anzahl von Rufen erhält. Die Wahrscheinlichkeit hiefür ist nicht genau σ_1^2 (weil die durch „sowohl — als auch" verbundenen Teilereignisse nicht streng unabhängig sind, man muß sie besonders überlegen und findet leicht

$$\sigma_{11} = \sum_{l=0}^{2l+2l' \le z} \sum_{l'=0} q^{2l} q^{2l'} (1-q)^{z-2l-2l'} \frac{z!}{(2l)!\,(2l')!\,(z-2l-2l')!}.$$

$2\sigma_{11}$ ist der Beitrag eines bestimmten Individuenpaars. Nun dürfen wir wieder ganz exakt schließen, daß der Beitrag aller $\frac{n_0(n_0-1)}{2}$ Individuenpaare, die sich anfangs in A befanden, gegeben ist durch

$$\frac{n_0(n_0-1)}{2} \cdot 2\sigma_{11} = n_0(n_0-1)\,\sigma_{11}.$$

Dieser Schluß wird nicht beeinträchtigt durch die Tatsache, daß z. B. die beiden Ereignisse:

1. Wiederfinden des Paars Nr. 67 und Nr. 25 und 2. Wiederfinden des Paars Nr. 67 und Nr. 43 — auch nicht angenähert unabhängig voneinander sind!

Genau ebenso findet man für den Beitrag der $\frac{(N-n_0)(N-n_0-1)}{2}$ Paare, die sich aus den zu Anfang nicht in A befindlichen Steinen bilden lassen,

$$(N-n_0)(N-n_0-1)\,\sigma_{22},$$

wo

$$\sigma_{22} = \sum_{l=0}^{2l+2l'+2 \le z} \sum_{l'=0} q^{2l+1} q^{2l'+1} (1-q)^{z-2l-2l'-2} \frac{z!}{(z-2l-2l'-2)!\,(2l+1)!\,(2l'+1)!}$$

Endlich für den Beitrag der $(N-n_0)n_0$ Paare, die anfangs getrennt waren:

$$2(N-n_0)n_0\sigma_{12},$$

wo

$$\sigma_{12} = \sum_{l=0}^{2l+2l'+1 \le z} \sum_{l'=0} q^{2l} q^{2l'+1} (1-q)^{z-2l-2l'-1} \frac{z!}{(2l)!\,(2l'+1)!\,(z-2l-2l'-1)!}.$$

Insgesamt also

$$n(n-1) = n_0(n_0-1)\,\sigma_{11} + 2(N-n_0)n_0\sigma_{12} + (N-n_0)(N-n_0-1)\,\sigma_{22}. \quad (13)$$

Die Summen σ_{ik} sind durch einen ähnlichen Kunstgriff herzustellen wie σ_1. Man hat nur durch additive Verknüpfung von je vier Trinomialreihen von dem Bau

$$(u \pm v \pm w)^z; \quad (u = 1-q,\ v = w = q)$$

mittels passender Vorzeichenverteilung dafür zu sorgen, daß bloß die Glieder übrig bleiben, in denen die Exponenten von v und w die jeweils vorgeschriebene Geradheit oder Ungeradheit aufweisen. So ist beispielsweise

$$\sigma_{11} = \tfrac{1}{4}\{(u+v+w)^z + (u+v-w)^z + (u-v+w)^z + (u-v-w)^z\}.$$

Ähnlich für die beiden anderen. Man findet so

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{11} &= \tfrac{1}{4}[1 + 2(1-2q)^z + (1-4q)^z], \\ \sigma_{22} &= \tfrac{1}{4}[1 - 2(1-2q)^z + (1-4q)^z], \\ \sigma_{12} &= \tfrac{1}{4}[1 - (1-4q)^z]. \end{aligned}\right\} \quad (14)$$

Zwischen den σ_{ik} besteht die Identität

$$\sigma_{11} + 2\sigma_{12} + \sigma_{22} = 1.$$

Wir setzen die Werte (14) in (13) ein und gehen dann, mit Benutzung von (12) sogleich zu dem eigentlich interessierenden mittleren Quadrat der Abweichung $n-\bar{n}$ über. Man findet mit Beachtung von (11) nach leichter Rechnung

$$\overline{(n-\bar{n})^2} = \bar{n}^2 - (\bar{n})^2 = \frac{N}{4}\left[1 - \left(1 - \frac{4}{N}\right)^z\right] + \left(n_0 - \frac{N}{2}\right)^2 \left[\left(1 - \frac{4}{N}\right)^z - \left(1 - \frac{2}{N}\right)^{2z}\right]. \quad (15)$$

Führen wir nun wieder die frühere Bezeichnungsweise ein $(R+k, 2R$ statt $n, N)$, so schreiben sich die Formeln (12) und (15)

$$\bar{k} = k_0\left(1 - \frac{1}{R}\right)^z, \quad (9')$$

$$\overline{(k-\bar{k})^2} = \frac{R}{2}\left[1 - \left(1 - \frac{2}{R}\right)^z\right] + k_0^2\left[\left(1 - \frac{2}{R}\right)^z - \left(1 - \frac{1}{R}\right)^{2z}\right]. \quad (10')$$

Dies sind die exakten Mittelwertsformeln, welche, wie man sofort sieht, für großes R (und beliebiges z) in die Ausdrücke (9) und (10) übergehen.

§ 3. Vergleich der Ziehungsergebnisse mit der Theorie.

A. Der stationäre Zustand. (Häufigkeitsverteilung und mittlerer Fehler ε^2.)

Zur Verwertung kamen alle Ziehungen ausschließlich der in Tabelle I wiedergegebenen ersten 200. — In der folgenden Tabelle II enthält die erste Kolonne die Laufzahl $k = \frac{s}{2}$, d. i. also die halbe Urnendifferenz oder die Abweichung k des Inhaltes $R + k$ einer Urne vom durchschnittlichen Wert $R = 50$. Die zweite Kolonne gibt den fünfstelligen Briggschen Logarithmus des bei der Auswertung von Formel (3) benötigten Binomialkoeffizienten $\binom{2R}{R+k}$ für $2R = 100$. Vielleicht kann diese Angabe einem Kollegen lästige Rechnerei ersparen. Die Berechnung von w_k nach der Näherungsformel (5) gibt Abweichungen in der dritten Dezimale von $\log_{10} w_k$. — Die dritte Kolonne enthält die aus $z \cdot w_k$ ($z = 4800$) erhältliche erwartete Häufigkeit, mit der unter z Ziehungen der Inhalt einer Urne den betreffenden Wert $R + k$ haben soll. Kolonne 4 und 5 enthalten die wirklich beobachteten Häufigkeiten bei $+k$ und $-k$; Kolonne 6 endlich gibt den Mittelwert, der mit den Angaben von Kolonne 3 übereinstimmen sollte.

Tabelle II.

$\pm k$	$\log_{10}\binom{100}{50 \pm k}$	$4800 \cdot w_k$	H_{+k}	H_{-k}	H_k
0	29,00386	382,1		443	443
1	28,99526	374,6	386	415	400,5
2	28,96946	353,0	365	323	344
3	28,92642	319,7	341	285	323
4	28,86613	278,2	301	252	276,5
5	28,78853	232,7	260	202	231
6	28,69325	187,0	204	156	180
7	28,58113	144,3	140	131	135,5
8	28,45117	107,0	98	105	101,5
9	28,30357	76,2	71	81	76
10	28,13820	52,1	44	62	53
11	27,95493	34,1	20	34	27
12	27,75300	21,5	8	18	13
13	27,53404	13,0	3	15	9
14	27,29606	7,5	3	15	9
15	27,03954	4,2	2	8	5
16	26,76398	2,3	0	2	1
17	26,46939	1,1	0	3	1,5
18	26,15539	0,51	0	3	1,5
19	25,82169	0,23	0	1	0,5
20	25,46795	0,11	0	0	0

Als auffällig ist zweierlei zu konstatieren: erstens die starken Abweichungen in der Nähe von $k = 0$, zweitens die bemerkenswerte Unsymmetrie $H_{+k} \neq H_{-k}$. Es ist dies um so auffälliger, als dasselbe Beobachtungsmaterial bei mehrfacher anderweitiger statistischer Bearbeitung sich als durchaus normal erwies. Zu bemerken ist allerdings, daß die vorliegende Art der Verwertung ungemein empfindlich ist gegen die bei so großem Zahlenmaterial fast unvermeidlichen Zählfehler. Ein Versehen in der „fortlaufenden Numerierung" (vgl. § 1) zu Beginn der Statistik kann auf längere Zeit den „Schwerpunkt" der Treppenkurve verschieben; und man ist nicht sicher, ob nicht, trotz mehrfacher Durchzählung

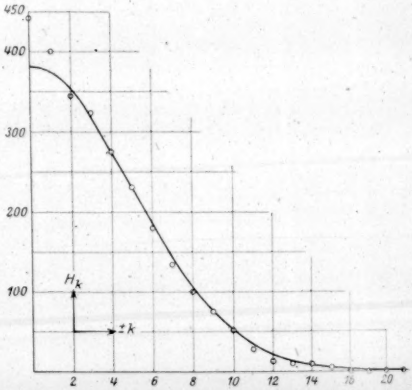


Fig. 2.

und Kontrolle ein oder das andere Versehen unkontrolliert blieb. Dies würde die Unsymmetrie verständlich machen, nicht aber, wie es scheint, die symmetrische Überhöhung der kleinen k-Werte, die am besten aus der in Fig. 2 enthaltenen graphischen Darstellung zu übersehen sind. Dabei ist k als Abszisse, $H_k = {}^1/_2 \cdot (H_{+k} + H_{-k})$ als Ordinate eingetragen. Die ausgezogene Kurve entspricht den Angaben der Kolonne 3 (Formel 3). — Man sieht die Begünstigung der Werte $k = 0$ und $k = +1$, wobei die Benachteiligung ziemlich gleichmäßig auf die übrige Kurve aufgeteilt ist. —

Aus Tabelle II läßt sich leicht der „mittlere Fehler" $\varepsilon^2 = \frac{\Sigma k^2 H_k}{4800}$ errechnen. Statt des erwarteten Wertes $\frac{2R}{4} = 25$ ergibt sich $\varepsilon^2 = 23{,}54$.

Als Ergänzung zu Tabelle II mögen noch die folgenden Zahlenangaben über die Unwahr-

Tabelle III.

o	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9. Schritt
15,0	14,2	14,2	14,0	13,8	13,4	12,8	12,6	12,1	12,0
10,0	9,68	9,70	9,44	9,34	9,04	8,87	8,52	8,47	8,28
5,0	4,91	4,84	4,76	4,66	4,55	4,48	4,40	4,37	4,30

scheinlichkeit bzw. Seltenheit stärkerer Abweichungen des Urneninhaltes vom Mittelwert 50 dienen; schon bei der geringen Zahl von $2R = 100$ Spielsteinen ergibt sich nach (3), daß das einmalige Auftreten der im folgenden angeführten k-Werte erst innerhalb der darunter angegebenen Zahl von z Zügen zu erwarten ist:

$k =$ 20 25 30 35 40 45 49
$z = 5 \cdot 10^6$ $5 \cdot 10^8$ $2 \cdot 10^{11}$ $5 \cdot 10^{14}$ $7 \cdot 10^{18}$ $2 \cdot 10^{24}$ $1 \cdot 10^{32}$

B. Der nichtstationäre Zustand.

Zur Prüfung der in § 2 B und C angegebenen Theorie wurde die Aussage von Formeln (9) bzw. (9′) herangezogen. Nach ihnen sollte auf einen herausgegriffenen Wert k_0 eine Reihe von k Werten folgen, die im Durchschnitt nach einer e-Potenz gegen den Wert $k = 0$ abnehmen. Nach (9) oder (9′) muß $\log_{10} \bar{k}$ als $f(z)$ aufgetragen eine Gerade ergeben, deren Neigung unabhängig vom jeweils gewählten Anfangswert k_0 gleich $\frac{1}{2{,}303\,R}$ bzw. nach der exakten Formel (9′) $-\lg_{10}\left(1 - \frac{1}{R}\right)$ sein muß.

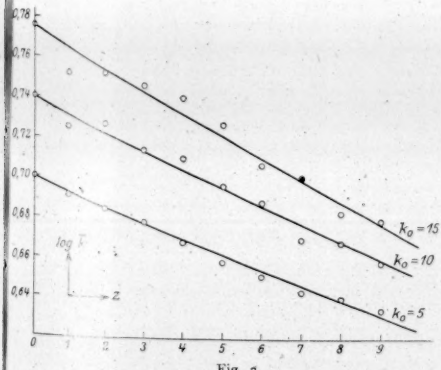


Fig. 3.

Dementsprechend wurden z. B. in jedem der zehn Fälle, wo nach Tabelle II k den Wert $k_0 = 15$ erreichte, die neun in der Ziehungsliste darauffolgenden k-Werte herausgeschrieben und gemittelt. Gleicherweise für die 106 Fälle, wo k den Wert $k_0 = 10$ hatte, und für 453 Fälle, in denen $k_0 = 5$ war. Tabelle III enthält diese drei Reihen für $\bar{k}$. — Fig. 3 gibt $\log_{10} \bar{k}$ als $f(z)$. (Die Ordinatenbezifferung gilt nur für die unterste Kurve $k_0 = 5$; die beiden anderen sind zur Platzersparnis parallel zu sich selbst nach unten geschoben.)

Die drei nach Augenmaß durchgelegten Geraden haben die Neigung (von unten nach oben): 0,0077, 0,0090, 0,0110; ohne Rücksicht auf das schwer einzuschätzende Gewicht gemittelt, erhält man 0,0092, während der geforderte Wert $\frac{1}{2{,}303 \cdot 50} = 0{,}00868$ wäre, bzw. 0,00877 nach der exakten Formel (9′).

Graz, Physikal. Institut der Technischen Hochschule, und Zürich, Physikal. Institut der Universität.

(Eingegangen 10. März 1926.)

Über Depolarisation von Resonanzstrahlung durch schwache Magnetfelder.

Von V. v. Keußler.

Die Beeinflussung des Polarisationszustandes der Resonanzstrahlung des Quecksilber- und Natriumdampfes durch schwache Magnetfelder ist hauptsächlich von Wood und Ellet und von W. Hanle untersucht worden. Die Resultate sind in einer Reihe von Publikationen diskutiert worden[1]). Es hat sich herausgestellt, daß schon sehr schwache Magnetfelder (bei Quecksilber etwa 1 Gauß, bei Natrium von der Größenordnung 10 Gauß) einen großen Einfluß auf die Polarisation ausüben können, und zwar in einer dem Zeemaneffekt vollkommen analogen Weise. Dabei ergeben sich aus der klassischen Theorie zwangsläufig alle durch das Magnetfeld hervorgerufenen Erscheinungen. Nach Bohr[2]), W. Hanle[3]) und W. Heisenberg[4]) sind sie auch vom Standpunkt der Quantentheorie verständlich. Nur in einem Falle liegt zwischen

1) Literaturangaben siehe im zusammenfassenden Bericht von W. Hanle, Ergebnisse d. exakt. Naturw. **4**, 214, 1925.
2) N. Bohr, Naturwissenschaften **12**, 115, 1924.
3) W. Hanle, Zeitschr. f. Phys. **30**, 93, 1924.
4) W. Heisenberg, Zeitschr. f. Phys. **31**, 617, 1925.

den Forderungen der klassischen Theorie und den Meßergebnissen von Wood und Ellet eine Unstimmigkeit vor, nämlich beim Gang der Depolarisation durch ein Magnetfeld, das senkrecht zum elektrischen Lichtvektor und parallel zur Beobachtungsrichtung orientiert ist.

Um für jede Größe und Richtung des Magnetfeldes den Polarisationsgrad und die Lage der Polarisationsebene der Resonanzstrahlung zu berechnen, muß man die Bewegung untersuchen, die ein isotrop gebundenes Elektron im Magnetfelde unter dem Einfluß des elektrischen Wechselfeldes des erregenden Lichtes ausführt. Da die Breite der erregenden Linie groß ist gegenüber der Breite der Resonanzkurve der dabei entstehenden erzwungenen Schwingung, kann man, um die Rechnung zu erleichtern und zugleich den tatsächlichen Verhältnissen gerecht zu werden, die Schwingung unter der Einwirkung eines kontinuierlichen Spektrums erfolgen lassen, wobei man im Hinblick auf die schmale Resonanzkurve für alle Frequenzen des erregenden Lichtes die gleiche Amplitude annehmen darf. Wird in der Richtung eines Magnetfeldes beobachtet, welche senkrecht zum elektrischen Vektor des erregenden Lichtes orientiert ist, so nimmt nach einer von Herrn Wentzel und dem Verfasser unter obigen Voraussetzungen in Anschluß an Voigt[1]) ausgeführten Rechnung die Polarisation ab nach der Beziehung

$$P = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\upsilon^2}{\mu^2}}}, \qquad (1)$$

wo P den Polarisationsgrad $= \frac{\text{polaris. Intensität}}{\text{Gesamtintensität}}$, υ die Larmorfrequenz im Magnetfelde, μ die Dämpfungskonstante der Schwingung bedeutet. Gleichzeitig findet eine Drehung der Polarisationsebene um den Winkel ϑ statt gemäß

$$\vartheta = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\upsilon}{\mu}. \qquad (2)$$

Unter den gleichen Voraussetzungen, jedoch durch einen etwas anderen Ansatz, gelangt G. Breit[2]) zum gleichen Resultat, wobei er für ϑ die Beziehung (2), für die Polarisationsabnahme einen von P abweichenden Ausdruck erhält. Der Unterschied entsteht dadurch, daß G. Breit als „Polarisation" das Intensitätsverhältnis $\frac{J_x - J_y}{J_x + J_y}$ definiert, wenn die x-Achse des Koordinatensystems parallel dem elektrischen Vektor des erregenden Lichtes, die z-Achse parallel dem Magnetfelde gerichtet ist. Er bekommt

$$\frac{J_x - J_y}{J_x + J_y} = \frac{1}{1 + \frac{\upsilon^2}{\mu^2}}. \qquad (3)$$

Auch Eldridge[1]) erhält unter Benutzung eines halbklassischen Modells das gleiche Resultat.

Der Verlauf von (1), (2) und (3) ist in Fig. 1 dargestellt.

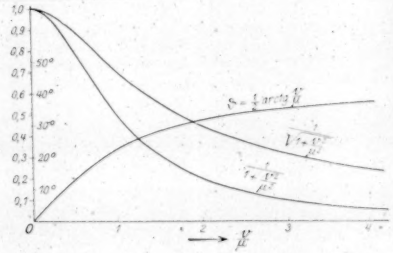


Fig. 1.

Der Winkel ϑ ist die von Hanle[2]) bei Quecksilber beschriebene Drehung der Polarisationsebene. Sie beträgt nach seinen Angaben bei $^1/_2$ Gauß ca. 20°. Eine entsprechende Drehung bei Natrium ist von A. Ellet[3]) beobachtet, wobei für kleine Winkel ein linearer Zusammenhang zwischen ϑ und dem Magnetfelde gefunden wird.

Der von Breit und Eldridge angegebene Ausdruck (3) ist gerade das, was Wood und Eldridge als Polarisationsgrad messen, denn sie vergleichen die Intensitäten zweier von einem Doppelbildprisma erzeugten Bilder, wobei das Doppelbildprisma während der Dauer der ganzen Meßreihe eine feste Stellung einnimmt. Nach ihren Messungen erfolgt die Abnahme von $P = \frac{J_x - J_y}{J_x + J_y}$ nicht nach (3), sondern exponentiell

$$P = P_0 e^{-aH},$$

wenn H die Stärke des Magnetfeldes bedeutet, und P_0 und a für Quecksilber, bzw. für Natrium charakteristische Konstanten sind.

Dieses Ergebnis steht in Widerspruch zu der oben skizzierten Theorie, doch kann man nach Breit die Theorie dem von Wood und Ellet beobachteten Zusammenhange zwischen Polarisation und Magnetfeld anpassen, wenn man annimmt, daß die Abklingung des Oszillators nicht exponentiell, sondern nach einem anderen Gesetz

1) W. Voigt, Magneto- und Elektrooptik. Leipzig 1908, S. 125.
2) G. Breit, Journ. of Opt. Soc. **10**, 439, 1925.

1) J. A. Eldridge, Phys. Rev. **24**, 234, 1924.
2) W. Hanle, l. c.
3) A. Ellet, Journ. of Opt. Soc. **10**, 427, 1925.

erfolgt. Auch durch Modifikation des Eldridgeschen Modells und durch neue Annahmen über den Emissionsvorgang sucht Breit dem Ergebnis von Wood und Ellet gerecht zu werden.

Indessen ist zu bedenken, daß die Versuche von Wood und Ellet rein qualitativer Natur sind. Bei Natrium ist die Polarisation so schwach, daß schon dadurch ihre genaue Bestimmung wesentlich erschwert wird. Bei Quecksilber wird zur Bestimmung der Polarisation das Verhältnis der Intensitäten der beiden durch das Doppelbildprisma erzeugten Bilder dem umgekehrten Verhältnis der Belichtungszeiten gleichgesetzt, die so gewählt sind, daß die Schwärzung des schwächeren Bildes bei längerer Belichtung der des stärkeren Bildes bei kürzerer Belichtung gerade gleichkommt. Das Schwarzschildsche Schwärzungsgesetz findet dabei anscheinend keine Berücksichtigung. Aus den in den Arbeiten von Wood und Ellet reproduzierten Kurven ist ersichtlich, daß die Meßgenauigkeit höchstens einige Prozent beträgt. Aus diesen Gründen scheinen ihre Messungen für quantitative Schlüsse über den Verlauf der Depolarisation und der mit ihr verbundenen Drehung nicht geeignet.

Überhaupt bietet das photographische Verfahren schon wegen seiner Umständlichkeit nur wenig Aussicht, uns volle Klarheit über den Depolarisationsvorgang zu verschaffen. Durch Anwendung der lichtelektrischen Photometrie ist es aber dem Verfasser gelungen, zuverlässiges Material zu dieser Frage zu erhalten. Die dabei angewandte Methode soll im Folgenden kurz angegeben werden.

Das Licht, dessen Polarisationszustand untersucht werden soll, tritt durch einen drehbaren ultraviolettdurchlässigen Nicol in eine empfindliche Photozelle für Ultraviolett. Der vom Nicol durchgelassene Anteil der Intensität ist dem Ausschlag des mit der Zelle verbundenen Elektrometers proportional. Ist das zu untersuchende Licht vollständig polarisiert, so erhält man durch Messung der Intensität bei verschiedenen Stellungen des Nicols eine $\sin^2$-Kurve. Ist die Polarisation unvollständig, so überlagert sich eine konstante Intensität und die $\sin^2$-Kurve liegt in einer gewissen Höhe über der Abszisse. Der Polarisationsgrad berechnet sich dann aus der Größe des Maximums und der Größe des Minimums der Kurve zu

$$P = \frac{J_{max} - J_{min}}{J_{max} + J_{min}}.$$

Die jeweilige Lage der Polarisationsebene wird aus der Lage eines Maximums bzw. eines Minimums ermittelt. Ist sie bekannt, so genügen zur Berechnung des Polarisationsgrades nur zwei Messungen: die eine bei einer Maximum-, die andere bei einer Minimumstellung des Nicols.

Da die bei dieser Methode der Polarisationsmessung entstehenden Fehler hauptsächlich durch Schwankungen der Intensität des Resonanzlichtes verursacht sind, wurde durch geeignete Maßnahmen für ein möglichst konstantes Brennen der zur Erregung der Resonanzstrahlung dienenden Quecksilberlampe gesorgt.

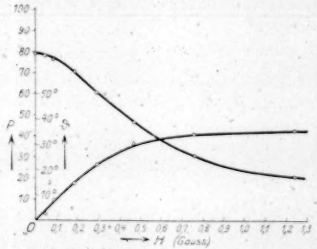


Fig. 2.

In Fig. 2 ist der erhaltene Zusammenhang dargestellt zwischen dem Polarisationsgrad und dem Drehwinkel einerseits und dem Magnetfeld andererseits, welches parallel der Beobachtungsrichtung vom Beobachter zum Resonanzgefäß verläuft. Wird das Magnetfeld kommutiert, so erfolgt die Drehung im entgegengesetzten Sinne;

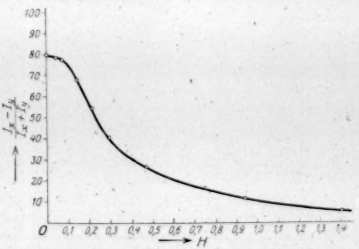


Fig. 3.

die Depolarisationskurve liegt symmetrisch zur Ordinate. Der Verlauf der Kurve zeigt, daß sowohl die Depolarisation, als auch die Drehung genau nach den Formeln (1) und (2) erfolgt.

Um eine der Wood-Elletschen Kurve vollkommen entsprechende Kurve zu erhalten, wurde das von ihnen als Polarisation gemessene Intensitätsverhältnis $\frac{J_x - J_y}{J_x + J_y}$ in Abhängigkeit von der Stärke des Magnetfeldes bestimmt (Fig. 3). Auch hier ergibt sich wieder vollkommene Überein-

stimmung mit der Rechnung. Von einem exponentiellen Abfall ist keine Rede.

Die soeben beschriebene Messung der Depolarisation und der mit ihr verbundenen Drehung bietet einen Weg zur genauen Bestimmung der Abklingungskonstante 2μ, und der ihr reziproken Abklingungszeit (Verweilzeit) τ. Da die Zeemanaufspaltung der Quecksilberlinie 2536,7 als einer einem Übergange aus einem $2\,p_2$- in einen $1\,S$-Zustand entsprechenden Linie $^3/_2$ der normalen Aufspaltung beträgt, muß man auch bei der Berechnung von 2μ statt der normalen Larmorfrequenz eine $^3/_2$-fache benutzen. Es ergibt sich dann

$$2\mu = 0{,}88 \cdot 10^7\ \mathrm{sec}^{-1}$$
$$\tau = 1{,}13 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{sec}$$

in guter Übereinstimmung mit dem von W. Wien[1]) aus Messungen der Abklingung des Leuchtens von Quecksilberkanalstrahlen gewonnenen Wert

$$2\mu = 1{,}02 \cdot 10^7\ \mathrm{sec}^{-1}.$$

Es muß jedoch dahingestellt bleiben, ob die Benutzung der $^3/_2$-fachen Larmorfrequenz berechtigt ist, denn durch eine neuere Untersuchung von Wood[2]) ist nachgewiesen, daß die Linie 2536,7 keine Einfachlinie ist, sondern aus fünf Komponenten besteht. Die wenigen bisher vorliegenden Beobachtungen von Wood über die Beeinflussung dieser Einzelkomponenten durch Magnetfelder reichen nicht aus, um bindende Schlüsse über die Art ihrer Zeemaneffekte ziehen zu können.

Die hier wiedergegebenen Kurven sind bei einer Temperatur des Quecksilbers von -21^0 aufgenommen. Der Druck des Quecksilberdampfes bei dieser Temperatur beträgt nur $2 \cdot 10^{-5}$ mm. Unter diesen Bedingungen wurde der Polarisationsgrad bei Abwesenheit eines Magnetfeldes zu 79,5 Proz. gemessen. Der Unterschied gegenüber dem Wood-Elletschen Wert von 90 Proz. ist aller Wahrscheinlichkeit nach durch die von den beiden Forschern benutzte Art der photographischen Photometrierung und durch die Ungenauigkeit ihrer Messungen verursacht.

Mit wachsendem Dampfdruck nimmt die Polarisation ab, was, wie sich auch durch Versuche zeigen ließ, der Hauptsache nach durch sekundäre Resonanz im Gefäß verursacht ist. Sie beträgt bei Zimmertemperatur, also bei einer Erhöhung des Dampfdruckes um das 50-fache, noch ca. 40 Proz. Eine Extrapolation für unendlich kleinen Dampfdruck ergibt nicht 100 Proz., wie man auf Grund des bisher vorliegenden Materials erwarten sollte, sondern nur ca. 80 Proz. Diese Frage wird in der demnächst erscheinenden ausführlichen Veröffentlichung genau erörtert werden.

Die hier beschriebene Methode zur Untersuchung der Polarisation im Ultraviolett bietet die Möglichkeit, auch andere Erscheinungen an polarisierte Resonanzstrahlung, z. B. die Depolarisation durch Zusatzgase, quantitativ zu erfassen. Solche Versuche sind gegenwärtig im Gange.

Vorliegende Untersuchung ist im Physikalischen Institut der Universität Hamburg begonnen, im Physikalischen Institut der Technischen Hochschule München fortgeführt worden. Herrn Prof. Dr. P. P. Koch und Herrn Geheimrat Prof. Dr. J. Zenneck möchte ich für entgegenkommendste Überlassung aller Mittel und Einrichtungen ihrer Institute meinen verbindlichsten Dank aussprechen. Herrn Prof. P. P. Koch bin ich außerdem für die leihweise Überlassung der benutzten Polarisationsoptik zu Dank verpflichtet. Den in München benutzten Quarzbrenner und ein Teil der Quarzlinsen und Quarzplatten verdanke ich der Notgemeinschaft der Deutschen Wissenschaft.

München, Phys. Inst. d. Techn. Hochschule, März 1926.

(Eingegangen 30. März 1926.)

1) W. Wien, Ann. d. Phys. 73, 483, 1924.
2) R. W. Wood, Phil. Mag. 50, 761, 1925.

Graphische Darstellung und Integration von ins Unendliche laufenden Kurven.

Von G. Kull.

Um für Kurven, die in der Nähe des Koordinaten-Ursprungs einen steilen, gegen die Ferne hin hingegen einen flachen, in die Länge sich ziehenden Verlauf haben, auf gedrängtem Raume eine übersichtliche Darstellung gewinnen zu können, pflegt man eine Skalenverzerrung in Anwendung zu bringen, dergestalt, daß man auf der einen, der Abszissenachse, nicht die wahren Abszissenbeträge, vielmehr die Logarithmen der wahren Beträge aufträgt. Hierdurch wird der Kurvenverlauf im Bereich der niederen Abszissenwerte in die Breite gezogen, im Bereich der hohen Abszissenwerte hingegen zusammengedrängt: zur Erleichterung einer solchen Kurvendarstellung hat man gefächelte Liniennetze (sonst Millimeter-Papier genannt) mit logarithmischer Skala in der X-Richtung (oder auch sowohl in der X- wie Y-Richtung) hergestellt. — Im Schema der Fig. 1 ist an die X-Achse sowohl eine normale (oben) als auch eine logarithmische (unten) Skala angetragen und es ist in das Schema, mit Benutzung der einen oder anderen Skala,

je eine Darstellung der gemeinen und der kubischen Parabel und der gemeinen Hyperbel eingetragen, die gewöhnliche Darstellung mit ausgezogenen Linien, die logarithmische mit gestrichelten bzw. punktierten.

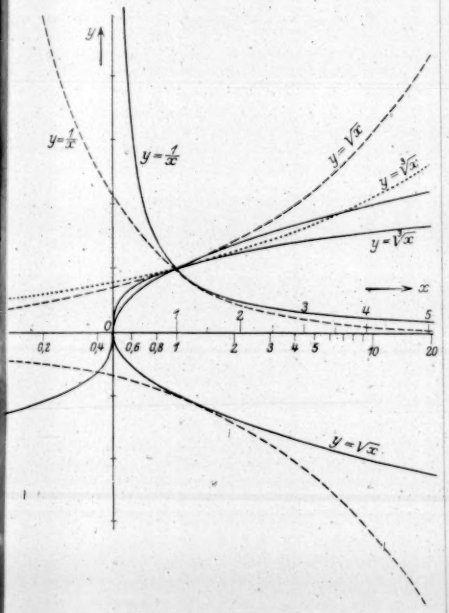


Fig. 1

Ein häufig störender Mangel der Kurvendarstellung im logarithmischen Liniennetz liegt darin, daß die Nullstelle der logarithmischen Skala in unendliche Ferne gerückt ist ($\log 0 = -\infty$) und daß die negativen Abszissenbeträge imaginär werden ($\log(-1) = i$). In vielen Fällen ist der Kurvenverlauf gerade in der Nähe der Nullstelle der Skala, rechts und links derselben, von besonderem Interesse: das in-unendliche-Ferne-Gerückt-sein der Nullstelle bringt mit sich, daß die Kurven in zwei Zweige zerfallen, einen positiven und einen negativen, deren jeder für sich aufzuzeichnen ist, und die beide je nach links und rechts hin in unendliche Ferne laufen (s. die kubische Parabel, Fig. 1, für die der positive Zweig punktiert in die Figur eingetragen ist). Zur (etwa erforderlichen) Veranschaulichung des Verlaufs der Kurve durch die Nullstelle und zu beiden Seiten derselben ist dann noch ein drittes in ein gewöhnliches Liniennetz einzuzeichnendes Schaubild nötig.

Für manche Kurven in der Statistik (z. B. tägliche Niederschlagsmenge, tägliche Wassermenge kleiner Wasserläufe), die zwischen großen und sehr kleinen Ordinatenhöhen oszillierend hin- und hergehen, wäre eine Skala-Verzerrung in der in Rede stehenden Art zwar erwünscht, die Anwendung der logarithmischen Skala ist für solche Kurven aber aus dem Grunde mißlich, weil das in-unendliche-Ferne-Gerückt-sein der Null-Linie die Anschaulichkeit der Bilder allzu sehr beeinträchtigen würde.

Weiter hat man es des öfteren mit Kurven zu tun, bei denen der Verlauf bis in die unendliche Ferne hin Punkt für Punkt von Interesse ist; dies gilt z. B. dann, wenn die eine der beiden Veränderlichen gebildet ist durch das Verhältnis zweier gleichartiger Größen, von denen ebenso die eine wie die andere den Wert null annehmen kann (z. B. kann in einer „Stoß"-Aufgabe vorgeschrieben sein, das Verhältnis der Massen der beiden zusammenstoßenden Körper m_1/m_2 sich verändern zu lassen zwischen den Grenzen 0/1 und 1/0, d. h. zwischen 0 und ∞). Für solche Kurvendarstellungen ist derjenige

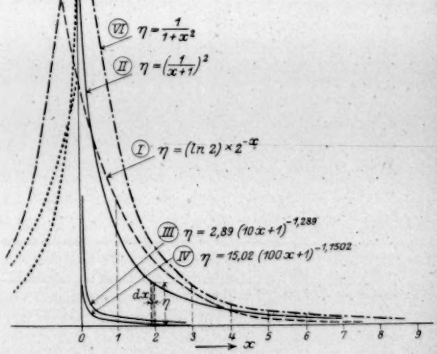


Fig. 2.

Grad der Zusammendrängung der hohen Skalenwerte, wie ihn die logarithmische Skala liefert, nicht zureichend, vielmehr wäre hier zu verlangen, daß die Skalenstelle „null" und die Skalenstelle „unendlich-fern" auf dem Zeichenblatte gleichmäßig gut zugänglich seien.

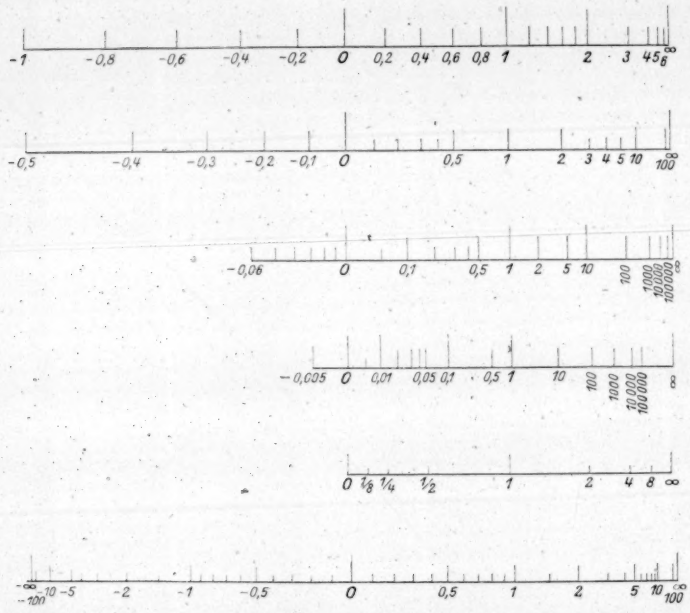


Fig. 3 a—f.

Die Erfordernisse, die im Obigen ausgesprochen liegen, können dadurch befriedigt werden, daß man zur Erzielung der angestrebten Skala-Verzerrung statt der log-Funktion eine solche Funktion von x in Anwendung bringt, die sowohl für $x = 0$, als für $x = \infty$ einen endlichen Wert (für $x = 0$ zweckmäßig den Wert 0) hat. Eine solche Funktion ist z. B. $y = \int_0^x e^{-x} dx$, die sich in der Spezialform $y = \ln 2 \int_0^x 2^{-x} dx$ für den vorliegenden Zweck aus dem Grunde besonders eignet, weil für diese letztere Funktion gilt:

$$f(0) = 0, \quad f(\infty) = 1,$$

$$f(1) = \frac{f(0) + f(\infty)}{2} = {}^1/_2,$$

$$f(2) = \frac{f(1) + f(\infty)}{2} = {}^3/_4,$$

$$f(3) = \frac{f(2) + f(\infty)}{2} = {}^7/_8$$

usw.

womit gegeben ist, daß die Skalenstelle „1" in die Mitte zwischen die Skalenstellen „0" und „∞", die Skalenstelle „2" in die Mitte zwischen die Skalenstellen „1" und „∞" usw. fällt. In Fig. 3a ist eine in solcher Art zustande kommende Skala A zur Darstellung gebracht; die Länge jedes Skalenintervalls ist bestimmt durch die Größe des je-zugehörigen Flächenstücks unter der Kurve

$$\eta = (\ln 2) \cdot 2^{-x} \qquad (1)$$

siehe Fig. 2[1]). — Die Stellen „1", „2", „3" usw.

1) Läßt man in der Funktion $\eta = (\ln \mu) \cdot \mu^{-x}$ das μ, das oben den Wert 2 hat, auf 1,072 und weiter auf 1,00695 abnehmen, so liefert die Funktion eine Zerrskala, bei der in der Mitte zwischen den Stellen „0" und „∞" das eine Mal „10", das andere Mal „100" steht; läßt man μ noch weiter, gegen 1 hin, abnehmen, so rücken höhere und höhere Zahlen in die Skalenmitte; läßt man schließlich μ eins werden, so kommt jeder Skalenstelle zwischen „0" und „∞" der Wert „∞" zu; das bedeutet eine derart starke Skalenverzerrung, daß vor dem „hereingeholten" Unendlichkeitsbereich der Endlichkeitsbereich auf einen einzigen Punkt, den Nullpunkt des Systems, zusammengeschrumpft ist. — Läßt man andrerseits μ wachsen, zunächst auf die Werte 1024 und $1{,}2665 \times 10^{30}$, so tritt an die Stelle zwischen „0" und „∞" die Zahl 1/10 bzw. 1/100; läßt man μ weiter wachsen, so treten immer kleinere Zahlwerte an die besagte Stelle. Läßt man μ schließ-

dieser Skala können selbstverständlich, je nach Bedarf, auch als Stellen „10", „20", „30" usw., oder als Stellen „100", „200", „300" usw. angesprochen werden.

Die Intervalle-Verjüngung gegen die Ferne hin ist bei der Skala nach Fig. 3a, wie ersichtlich, eine sehr starke, derart, daß die Skale für viele Kurven wenig schöne Bilder liefern wird. Weniger stark nach der Ferne hin sich verjüngende Skalen liefern die Funktionen

$$y = \int_0^x (x+1)^{-2}\,dx,$$

$$y = 2{,}89\int_0^x (10x+1)^{-1{,}28}\,dx,$$

$$y = 15{,}02\int_0^x (100x+1)^{-1{,}1502}\,dx.$$

Die Länge der Skalenintervalle ist auch hier, ähnlich wie oben, bestimmt durch die Größe des je = zugehörigen Flächenstücks unter den Kurven

$$\eta = (x+1)^{-2}, \qquad \text{(II)}$$

$$\eta = 2{,}89(10x+1)^{-1{,}28}, \qquad \text{(III)}$$

$$\eta = 15{,}02(100x+1)^{-1{,}1502}. \qquad \text{(IV)}$$

Diese Kurven (in X-Richtung verschobene Hyperbeln) sind in Fig. 2 ausgezogen gezeichnet. Die mit Hilfe derselben zu gewinnenden „Zerrskalen" B, C, D sind in Fig. 3b, c, d zur Darstellung gebracht; auch bei diesen Skalen liegen, wie ersichtlich, die Skalenstellen „1" in der Mitte zwischen den Stellen „0" und „∞" und es könnten die Stellen „1" auch als Stellen „10" oder „100" usw. angesprochen werden.

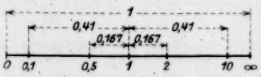


Fig. 4.

Die Skala B, Fig. 3b, weist die aus beistehender Fig. 4 ersichtliche Symmetrie in bezug auf die Skalenstelle „1" auf; der Verf. bezeichnet sie aus diesem Grunde als „harmonische Zerrskala". Diese Skala weist noch eine weitere besondere Eigentümlichkeit auf; wenn man von ihrer „0"-Stelle aus eine normale Skala in der Weise herstellte, daß die Intervallierung, wie sie an der „0"-Stelle besteht, gleichschrittig fortgesetzt wird, so fällt die Stelle „1" der so entstehenden normalen Skala mit der Stelle „∞" der Zerrskala zusammen.

Überraschenderweise führt noch ein zweiter ganz andersartiger Weg zu der „harmonischen Zerrskala" B. Läßt man in dem Ausdruck $\int_1^\infty \xi^{-\lambda} d\xi = \mu$ (Integralfläche unter Hyperbeln verschiedenen Grades) das μ alle Werte zwischen 0 und ∞ durchlaufen, und betrachtet man diese Werte als Intervalle der normalen Skala, so sind die reziproken Werte der je zugehörigen Beträge λ nichts anderes als die entsprechenden Intervalle der „harmonischen Zerrskala" (für $\lambda = 1$ wird $\mu = \infty$, für $1/\lambda = 0$, also $\lambda = \infty$ wird $\mu = 0$; die Hyperbel unendlich hohen Grades: $\eta = \xi^{-\infty}$ fällt mit dem Achsenkreuz zusammen; ihre Integralfläche ist null). Die theoretische Bedeutung dieses empirisch gefundenen Zusammenhangs ist dem Verf. nicht bekannt.

Eine primitive, für manche Zwecke aber recht wohl genügende „Zerrskala" E, Fig. 3e, kann man noch dadurch gewinnen, daß man die Stelle „1" in die Mitte zwischen „0" und „∞" setzt, die Stellen „$^1/_2$" und „2" in die Mitte zwischen „0" und „1" bzw. zwischen „2" und „∞" usw.

Die Skalen, wie in Fig. 3 dargestellt, können unmittelbar benutzt werden zur Gewinnung von Liniennetzen für die Darstellung solcher Kurven, deren Verlauf nur im positiven Bereich praktische Bedeutung hat. So sind z. B. in das Liniennetz der Fig. 5a, das in der Art zustande gekommen ist, daß die Skala A in der X- und Y-Richtung aufgetragen worden ist, dieselben Kurven wie in Fig. 2 eingetragen. Für die ähnlichen Darstellungen der Fig. 5b, c und d sind in ähnlicher Art die Skalen B, C und D benutzt. — Es sind hier die Linien $x = \infty$ und $y = \infty$ als zwei getrennte Linien dargestellt, die aufeinander senkrecht stehen; in Wahrheit fallen diese zwei Linien in positiven Raumzwickel der Koordinatensysteme der Fig. 5 in eine einzige Linie zusammen, die unendlich ferne Gerade, die hier als Kreislinie darzustellen wäre (s. Fig. 5*), womit gegeben ist, daß alle Netzlinien als Mittelding zwischen Gerade und Kreislinie, d. h. als Ellipsenlinien darzustellen wären. — Für die Aufzeichnung solcher Kurven, die an X- oder Y-Achse asymptotisch anlaufen, kann dies übersehen werden.

Für die Darstellung solcher Kurven, deren Verlauf auch im negativen Bereich von Interesse ist, kann man die Zerr-Skala, wie sie von der

lich ∞ werden, so ist alsdann zugleich der Unendlichkeitsbereich und der ganze Endlichkeitsbereich in die Stelle hineinverschrumpft, die zuvor als Stelle „∞" anzusprechen war; denkt man sich die Skala auf X- und Y-Achse eines Koordinatensystems, und zwar in positiver und negativer Richtung, aufgetragen, siehe Fig. 6*, so hat man es dann statt mit einer Stelle „∞" mit einer „Kreislinie ∞" (sonst unendlich ferne Gerade genannt) zu tun; das wäre alsdann von dieser Kreislinie, in welche die besagten beiden Bereiche verschrumpft sind, umschlossen wird, ist nichts anderes, als der ins Räumliche hinausgezogene, hinausgezerrte Nullpunkt, ein „gedehntes Nichts".

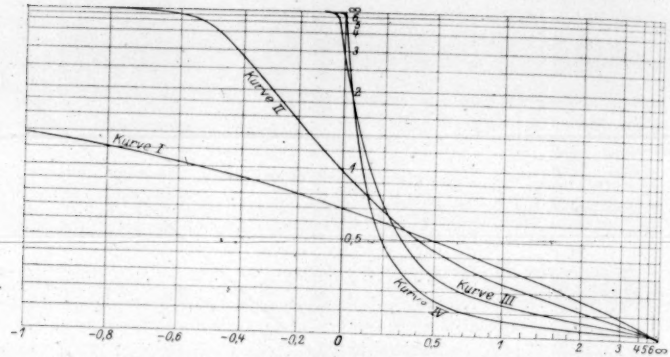


Fig. 5 a.

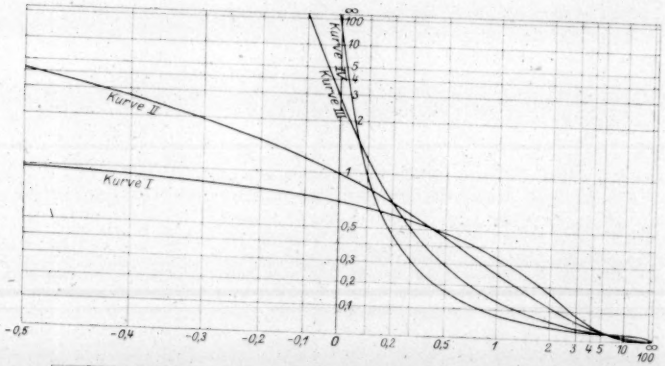


Fig. 5 b.

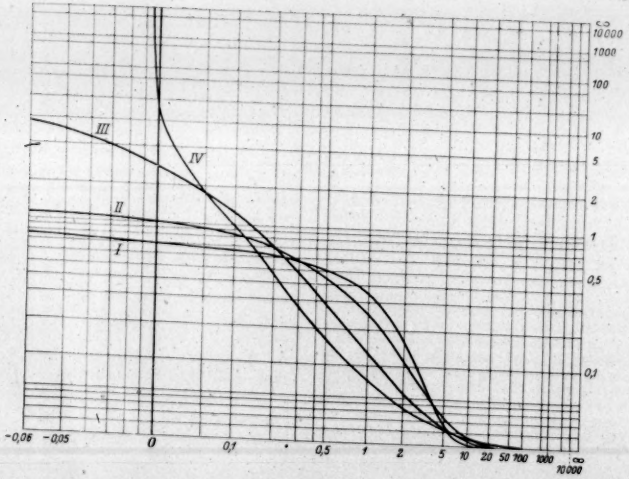


Fig. 5 c.

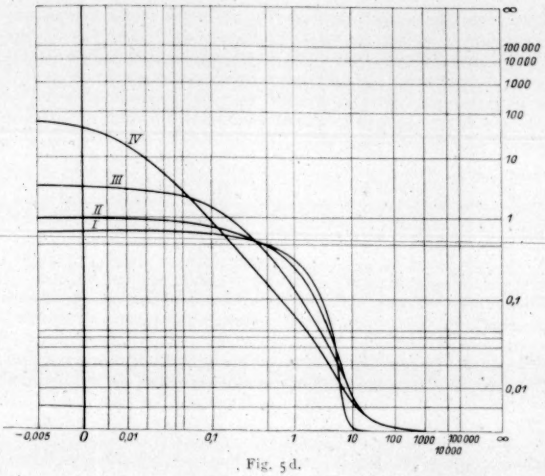


Fig. 5d.

Nullstelle aus nach der positiven Richtung aufgetragen wird, — spiegelbildartig — auch nach der negativen Richtung hin auftragen. Einer in solcher Art zustande kommenden Zerrskala haftet natürlich eine Unstrenge an insofern, als

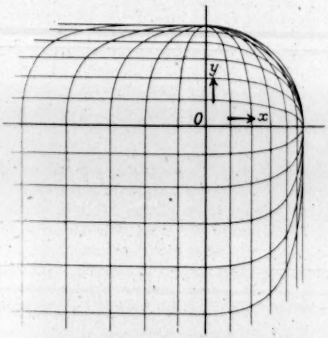


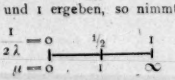
Fig. 5*. Ebenes, verzerrtes Liniennetz.

die Integralfläche, nach deren einzelnen Flächenstücken die Intervalle der Skala bestimmt sind, hier dann nicht von einer geschlossenen Kurve begrenzt wird, vielmehr von einer solchen, die in der Mitte einen Knick aufweist, wie dies durch die punktierten Linien in Fig. 2 zur Anschauung gebracht wird. Diese Unstrenge hat aber, solange es sich nur um übersichtliche Darstellung von Schaulinien handelt, kaum etwas zu bedeuten. Immerhin aber ist es ohne besondere Schwierigkeit möglich, eine nach der positiven und negativen Richtung symmetrisch sich erstreckende Zerrskala herzustellen, die mit einer solchen Unstrenge nicht behaftet ist, nämlich mit Hilfe der Kurvengleichung $\eta = \frac{1}{1+x^2}$ (s. Fig. 2, VI, strichpunktiert), bzw. der Integralfunktion

$$y = \frac{2}{\pi}\int_0^x \frac{dx}{1+x^2} = \frac{2}{\pi}\operatorname{arc\,tang} x\Big|_0^x;$$

die Skala ist in Fig. 3 als Skala F eingezeichnet, sie ist der Skala B sehr ähnlich und sie weist auch einen ähnlich-solchen harmonischen Aufbau auf, wie mit Fig. 4 für Skala B gezeigt. Ausgehend von der allgemeineren Form $y = \int_0^x (1+x^2)^{-\lambda} dx$ könnte man noch weitere symmetrische Skalen, die hinsichtlich des Charakters der Skala-Verzerrung den Skalen C und D ähnlich wären, gewinnen; es wäre zu setzen $0{,}5 < \lambda < 1$; mit $\lambda = 0{,}5$ würde die Fläche zwischen 0 und ∞ unendlich groß werden[1]).

1) Gibt man in dem Ausdruck $\frac{2}{\pi}\int_0^\infty (1+x^2)^{-\lambda} = \mu$ dem Zeichen λ verschiedene Werte zwischen ∞, 1 u. 0,5 womit sich für den Ausdruck $\frac{1}{2\lambda}$ (siehe beist. Figur) Werte zwischen 0, ½ und 1 ergeben, so nimmt μ verschiedene



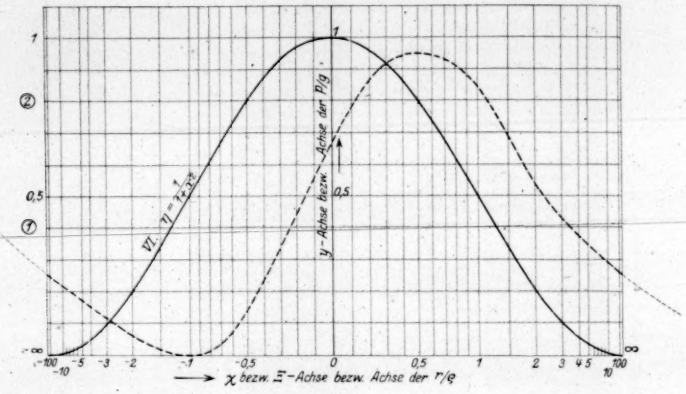


Fig. 6.

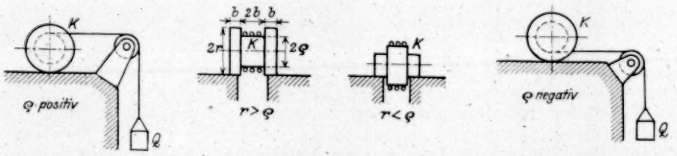


Fig. 7 a—d.

Die rechnerische Integration für beliebiges λ (zwischen 0,5 und 1) wäre sehr schwierig; mit Hilfe des unten angegebenen graphischen Integrationsverfahrens läßt sich die Aufgabe sehr leicht lösen; trotzdem glaubte der Verf. darauf verzichten zu sollen, im Rahmen dieser Arbeit solche Skalen noch zu geben. Sollte sich eine die Herstellung von Sonderdrucken lohnende Nachfrage nach den neuen Liniennetzen ergeben, so würde der Verf. solche Skalen noch ausarbeiten.

Fig. 6 zeigt ein Liniennetz, auf dessen X-Achse die nach beiden Seiten hin symmetrische Skala F aufgetragen ist; auf die Y-Achse ist eine normale Skala aufgetragen. In dieses Liniennetz ist, mit ausgezogener Linie, eingezeichnet die Kurve $\eta = \frac{1}{1+x^2}$, d. h. also dieselbe Kurve, deren Gesetz der Zerrskala, welche hier zur Anwendung gekommen ist, zugrunde liegt: die Kurve weist in diesem Liniennetz völlig genau die Form einer cos-Linie auf, die als eine geschlossene sich darstellt, wenn man sich das Liniennetz auf einen Zylinder aufgezeichnet denkt, derart, daß die Linie $x = \infty$ und $x = -\infty$ sich decken; wie diese überraschende Tatsache mathematisch zu erklären sei, konnte der Verf. nicht ermitteln. Weiter ist in das Liniennetz beispielshalber noch gestrichelt eingezeichnet eine Schaulinie, die die Auflösung der folgenden Dynamikaufgabe bedeutet: Ein Rollkörper K, siehe Fig. 7, auf dessen Mittelteil ein Faden aufgewunden ist, wird durch den Zug des am Faden hängenden Gewichtes Q auf horizontaler Platte in beschleunigte rollende Bewegung versetzt; das Gewicht von Q verhält sich zu dem von K wie 1 : 10; das Verhältnis der Radien r und ϱ von K kann jeden beliebigen Wert zwischen $+\infty$ und $-\infty$ annehmen; $\varrho = 0$ bedeutet, daß der mittlere Teil von K gebildet ist durch eine (gewichtlose) Achse, an die der Faden einfach mit einer Schlinge angehängt ist, auf die er sich nicht aufwindet; $r = 0$ bedeutet, daß an Stelle der Bordflansche der Fig. 7 c kurze, dünne (gewichtlose) Achsstummel treten, die in

Werte zwischen 0, 1 und ∞ an. Betrachtet man die Werte von μ als Intervalle einer normalen Skala, so liefern die je-zugehörigen Beträge $\frac{1}{2\lambda}$ die Intervalle einer Zerrskala, von der nach Obigem vermutet werden kann, daß sie der Zerrskala F ähnlich (oder mit ihr identisch?) sein werde. Auch diese Aufgabe ist mit Hilfe des unten angegebenen graphischen Verfahrens leicht zu lösen.

Lagern gehalten sind, so daß sie nur sich drehen, nicht rollen können; ϱ positiv und ϱ negativ bedeutet bzw. Rechts- und Linksaufwindung des Fadens, siehe Fig. 7 a u. b; es ist zu bestimmen das Verhältnis der Beschleunigung p, mit der Q und K in Bewegung treten, zur Schwerebeschleunigung g, und zwar in Funktion des Verhältnisses r/ϱ: In ein gewöhnliches Liniennetz eingetragen verliefe die Kurve, die man als Lösung der Aufgabe erhält, nach beiden Seiten hin in unendliche Ferne; da nun aber die Werte von p/g, die nahe den Stellen $r/\varrho = +\infty$ gelegen sind, gar nicht minder von Interesse sind als die Werte, die nahe der Stelle $r/\varrho = 0$ gelegen sind, so wird es bei Verwendung eines gewöhnlichen Liniennetzes nötig sein, zwei Schaulinien zu zeichnen, eine, in der die Kurve als Funktion von ϱ/r, und eine zweite, in der sie als Funktion von r/ϱ erscheint. Die Einzeichnung in das neue Liniennetz ergibt eine Schaulinie, bei der keine Kurvenstelle in der Darstellung bevorzugt, keine in Hintergrund geschoben ist; man muß sich auch hier ebenso wie oben das Liniennetz auf einen Zylinder aufgetragen denken, derart, daß $x = \infty$ und $x = -\infty$ zusammenfallen: die Schaulinie muß die Netzlinie $x = \mp\infty$ in stetigem Verlauf durchschneiden (siehe die feiner gestrichelten Verlängerungen). Für letztere Kurve gilt in Fig. 6 die eingeringelte Ordinaten-Skalen-Bezifferung.

Trägt man sowohl auf der X- als auf der Y-Achse die symmetrische Zerrskala auf, siehe Fig. 6*, so ergibt sich als Abbild der „unendlichen Ferne" eine scharfe Kreislinie: alle Netzlinien zwischen dem Nullpunkt und der „unendlichen Ferne" müssen sich dann folgerichtig als Mittelding zwischen Kreislinie und unendlich ferner Linie, d. h. als Ellipsenlinien, darstellen. Es ist in das so zustande gekommene Koordinatensystem der Fig. 6* mit ausgezogenen Linien die Parabel $y = x^2$, mit gestrichelten die e^x-Linie eingezeichnet; für die Darstellungen II und C gilt die den Skalenstrichen angeschriebene Bezifferung, für die Darstellungen I und A ist an die Skalenstriche je das Vierfache, für die Dar-

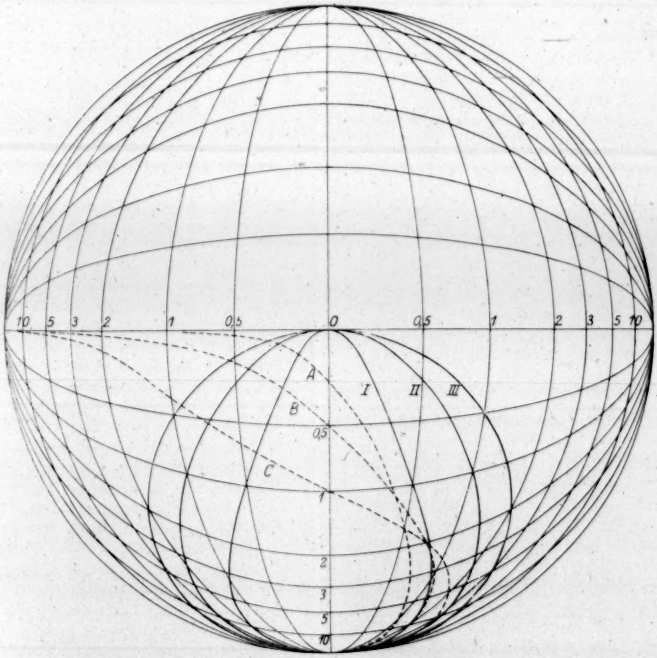


Fig. 6*. Keine Kugelprojektion, sondern ebenes, verzerrtes Liniennetz.

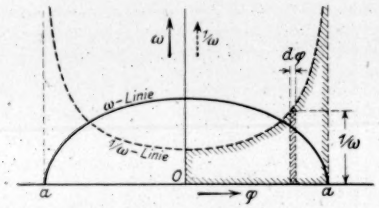


Fig. 8.

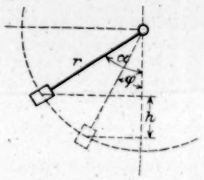


Fig. 9.

stellung B das Doppelte, für die Darstellung III die Hälfte der tatsächlich angeschriebenen Zahlbeträge angeschrieben zu denken. Man sieht: Parabel und e^x-Linie wenden sich in den fernen Gebieten so, daß — wie es ja denn die Kurvendiskussion für die Parabel verlangt — die „unendlich ferne Gerade" im Schnitt mit $x = 0$ berührt wird: die Parabel stellt sich als verzerrte Ellipse dar, deren einer Schenkel in unendliche Ferne gerückt ist.

Der graphischen Lösung von Integrationsaufgaben steht öfters das Hindernis entgegen, daß die Fläche, deren Größe zu ermitteln ist, einen Zipfel aufweist, der, an irgendeiner Asymptote hin, in unendliche Ferne sich erstreckt und dessen Größe zunächst nur geschätzt werden kann. Eine solche Aufgabe ist z. B. die der Bestimmung der Schwingungsdauer eines Pendels bei größerer Amplitude: hierfür läßt sich auf Grund der Formel $v = \sqrt{2gh}$ aus vorstehender Fig. 8 sofort ablesen der Ansatz:

$$v = r \cdot \omega = \sqrt{2g \cdot r \cdot (\cos\varphi - \cos\alpha)}$$

also: $\omega = \sqrt{2\frac{g}{r}}\sqrt{\cos\varphi - \cos\alpha}$.

Nun ist $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$, also $dt = \frac{1}{\omega} \cdot d\varphi$, d. h. ein Zeit-Differential ist ausgedrückt als (unendlich schmales) Rechteck aus der Ordinate $\frac{1}{\omega}$ (siehe Fig. 9) und dem Abszissenstückchen $d\varphi$; die Schwingungsdauer ist: $T = 4\int_0^{\alpha} \frac{1}{\omega} \cdot d\varphi$, d. h. das Vierfache der in der Fig. 9 anschraffierten Fläche. — Für die Nachrechnung von Bewegungsvorgängen macht es im Prinzip keinen Unterschied, ob man sich für die Bestimmung des augenblicklichen Bewegungsgrades des Begriffs „Geschwindigkeit", $v = \frac{ds}{dt}$; $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$, bedient oder des reziproken Wertes der Geschwindigkeit, den wir als „Langsamkeit" zu bezeichnen hätten: $1/v = \frac{dt}{ds}$; $1/\omega = \frac{dt}{d\varphi}$ (für die Einheit des Weges benötigte Zeit). Daß man dem Begriff „Geschwindigkeit" vor dem der „Langsamkeit" den Vorzug geben mußte, hängt damit zusammen, daß das Eingehen des praktisch so häufig vorkommenden Falles $v = 0$ (Stillstand des vorher in Bewegung gewesenen oder nachher in Bewegung tretenden Körpers) in einen rechnerischen Entwicklungsgang gar keine Schwierigkeiten macht, und andererseits der Fall $v = \infty$, dessen Eingehen in rechnerische Entwicklungen unbequem wäre, praktisch nicht vorkommt. Die Benützung des Begriffes „Langsamkeit" führt zu der Unbequemlichkeit, daß $1/v = \infty$ (Stillstand) in die Rechnung eingeht. Diese Unbequemlichkeit ist nun nicht immer zu vermeiden, wie vorliegender Beispielsfall zeigt: Für die Schwingungsdauer ergab sich uns ein Ausdruck, der eine Funktion der Langsamkeit und des Weges ist und der geometrisch dargestellt ist durch die Fläche unter der Langsamkeitslinie in Fig. 9. Die graphische Auswertung dieser Fläche ist wegen des Vorhandenseins einer unendlich großen Ordinatenhöhe an der Stelle $\varphi = \alpha$ mit gewöhnlichen Mitteln nicht möglich. Bei Verwendung des neuen Liniennetzes wird sie möglich. Das Verfahren werde im Folgenden der Einfachheit halber nicht für die Integralfläche der Fig. 9, sondern für die Flächen unter den Kurven der Fig. 1 (deren Größe ja leicht auch rechnerisch zu ermitteln ist) entwickelt, und zwar werde aus unten sich ergebenden Gründen für das zur Durchführung des Verfahrens dienende Liniennetz die Skala C der Fig. 2c in Anwendung gebracht, siehe Fig. 10. Dieses Liniennetz kann man in der Art zustandekommend denken, daß ein gewöhnliches Liniennetz in Richtung der Abszissenachse zusammenschrumpft, so weit, daß die Stelle „∞" an die Stelle „1", die Stelle „1" an die Stelle „0,5" usw. kommt. Damit die Flächen unter den ins Netz eingezeichnet gedachten Kurven im Zusammenschrumpfen des Netzes ihre Größe bewahren, d. h. $\eta \cdot dx$ in Fig. 2 gleich $y \cdot d\xi$

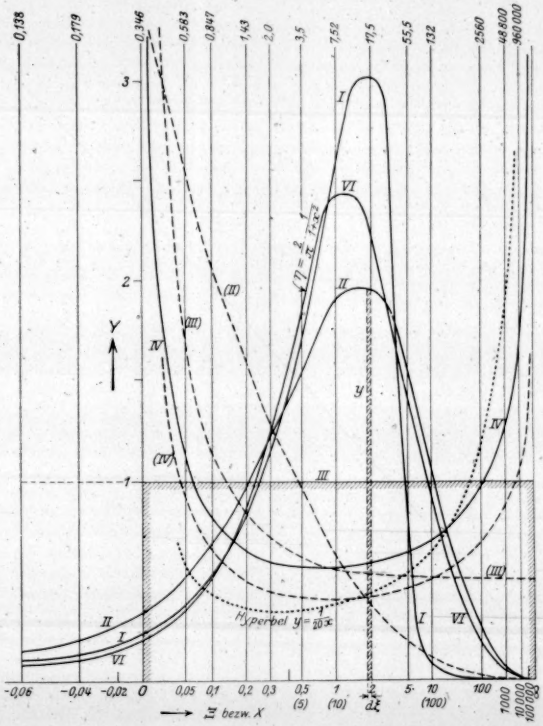


Fig. 10.

in Fig. 10, müssen ihre Ordinaten im selben Maße sich erhöhen, in welchem die je zugehörigen Abszissenstellen in sich zusammenschrumpfen: jedem Abszissenstück x des gewöhnlichen Liniennetzes entspricht im zusammengeschrumpften Liniennetz ein Abszissenstück $\xi = 2{,}89 \int (10x+1)^{-1{,}289} dx$ (*); ebenso entspricht jedem dx ein $d\xi = 2{,}89\,(10x+1)^{-1{,}289}\,dx$; danach besteht zwischen $d\xi$ und dx das Verhältnis: $\frac{d\xi}{dx} = 2{,}89\,(10x+1)^{-1{,}289}$. Jede Ordinate der Kurve, für welche die graphische Integration durchgeführt werden soll, ist mit dem ihr zugeordneten Wert dieses Ausdrucks zu dividieren; hierdurch wird eine überhöhte Kurve erhalten, die mit der „in sich verschrumpften" Abszissenachse eine ebenso große Fläche einschließt wie die wahre Kurve mit ihrer Abszissenachse. Im Liniennetz der Fig. 10 ist oben an jede Ordinatenlinie der ihr zugehörige Überhöhungsfaktor (reziproker Wert obigen Ausdrucks $\frac{d\xi}{dx}$) beigeschrieben; an der Stelle $x = 0{,}128$ hat dieser Faktor den Wert 1, links derselben ist er kleiner, rechts größer als 1 (für Skala B fiele diese Grenze auf die Stelle $x = 0$).

Beim Einzeichnen der Kurve III in das Liniennetz der Fig. 10, dessen Skalen-Verzerrung durch das Kurvengesetz eben dieser Kurve bestimmt ist, findet es sich, daß für jede Kurvenstelle Ordinate und Überhöhungsfaktor sich gerade zu 1 aufheben; es wird danach für diese Kurve in dem Liniennetz eine Abszissen-Parallele erhalten, die mit der Abszissenachse, Ordinatenachse und Ordinatenlinie $x = \infty$ ein Quadrat von der Seitenlänge 1 und dem Inhalt $1 \times 1 = 1$

einschließt. In der Figur stellt sich die Fläche als Rechteck dar, weil aus Gründen der Darstellung der Ordinatenmaßstab gegen den Abszissenmaßstab auf die Hälfte erniedrigt ist. Für die Kurven I, II und VI, die sich gegen die unendliche Ferne hin der X-Achse enger anschmiegen als die Kurve III, ergeben sich im Liniennetz der Fig. 10 Linien, die gegen die Ξ-Achse konkav sind und die gegen die Stelle $x = \infty$ hin auf Null herabsinken; für die Kurve IV, die sich der X-Achse gegen die Ferne hin noch weniger anschmiegt als die Kurve III, ergibt sich eine gegen die Ξ-Achse konvexe Linie. Die Flächen unter diesen Linien haben ebenfalls die Ausdehnung 1, was für die drei erstgenannten durch Umfahren mit dem Planimeter zu erhärten wäre. Die Fläche unter der Linie IV, welche an der Ordinatenlinie $x = \infty$ jäh in die Höhe steigt, kann mit dem Planimeter nicht umfahren werden. Zur graphischen Integration von Kurven, die sich ihrer Asymptote so wenig eng anschmiegen wie Kurve IV, wäre die Zerrskala D der Fig. 2 d in Anwendung zu bringen.

Zum Vergleich ist in das Liniennetz der Fig. 10, feinpunktiert, auch noch die Linie eingezeichnet, die für die Hyperbel $y = \frac{1}{20\,x}$ erhalten wird: dieselbe läuft an die Ordinatenlinie $x = \infty$ asymptotisch an und schließt mit ihr einen Flächenzwickel von unendlich großer Ausdehnung ein.

Auch für das Integrationsverfahren ist es natürlich angängig, die Stellen 0,1; 1, 10 usw. der Zerrskala als Stellen 1, 10, 100 usw. anzusprechen. Mit der Substitution $x = \xi\,10$ erhält obige Funktion (*) (s. S. 325) folgende Form:

$$\begin{aligned}\xi &= 2{,}89 \int (\xi + 1)^{-1{,}289}\, d\xi\, 10 \\ &= 0{,}289 \int (\xi + 1)^{-1{,}289}\, d\xi.\end{aligned}$$

Damit ergibt sich für den Überhöhungsfaktor: $\frac{d\xi}{d\xi} = \frac{(\xi + 1)^{1{,}289}}{0{,}289}$, statt wie oben: $\frac{dx}{d\xi} = \frac{(x + 1)^{1{,}289}}{2{,}89}$, d. h. der Überhöhungsfaktor ist nun 10 mal so groß als vorher. In Fig. 10 sind für letztbesagte Skalenbezifferung gestrichelt noch eingetragen die Integrationslinien [(II), (III), (IV)] der Kurven II, III, IV. Für die Kurve III, für die sich vorher eine Abszissen-Parallele in Höhe $y = 1$ ergeben hat, ergibt sich jetzt eine Kurve (III) mit bis zur Ordinatenlinie $x = \infty$ sich erstreckendem horizontalen Endauslauf in Höhe $y = {}^1/_2$. Die Linie (IV) der Kurve IV schließt auch hier mit der Ordinatenlinie $x = \infty$ einen weit empor sich erstreckenden Zwickel ein, der zwar viel kleiner ist als der unter der ausgezogenen Linie IV, aber noch immer der graphischen Bestimmung sich entzieht. Die Flächen unter den gestrichelten Linien zwischen $x = 0$ und $x = \infty$ haben den Inhalt 1.

Hat man wieder und wieder graphische Integrationen in der Art wie beschrieben durchzuführen, so ist es zweckmäßig, statt in jedem Falle die Kurvenordinaten mit dem Überhöhungsfaktor zu multiplizieren, die Ordinatenlinien des Netzes jede für sich ein für allemal entsprechend überhöht zu skalieren.

(Eingegangen 20. März 1926.)

Die Herkunft der Strahlungsenergie der Fixsterne.

Von H. Fricke.

Die Sonne und die Fixsterne strahlen scheinbar andauernd ungeheuere Energiemengen in den dunklen und kalten Weltenraum aus. Die Wärmetheorie glaubt daraus mit unbedingter Sicherheit eine allmähliche Erkaltung der Gestirne ableiten zu können und lehrt eine Entwicklung derselben in diesem Sinne. Dennoch ist diese Auffassung in zweifacher Hinsicht unbefriedigend. Erstens ist sie durch die Beobachtung gar nicht gestützt; diese deutet bei der Sonne, deren Temperatur doch nur etwa 6000° beträgt, vielmehr auf eine Konstanz der Temperatur durch Jahrmillionen[1]) hindurch. Zweitens befriedigt die Vorstellung eines dauernd erkaltenden Weltalls unser Denken nicht recht. Mit Recht bemerkt Nernst[2]), daß die Anschauung einer einseitigen Entwicklung aller Weltkörper im Sinne einer Erkaltung, Energieentwertung und eines allgemeinen Wärmeausgleichs von „höchster Unwahrscheinlichkeit" sei.

Es soll hier nun die Frage aufgeworfen werden, ob die Grundlage jener Lehre, die Annahme einer einseitigen Energiestrahlung in den Weltraum, denn überhaupt einwandfrei erwiesen ist. Die einfachste, mit der Beobachtung unmittelbar übereinstimmende Lösung des Problems wäre offenbar gegeben, wenn man ein Strah-

1) Geologische Untersuchungen machen es wahrscheinlich, daß es schon im Präcambrium Eiszeiten gegeben hat, daß also das Klima der Erde — und damit auch wohl die Temperatur der Sonne — vielleicht seit Hunderten von Jahrmillionen sich nur unerheblich geändert hat. Vgl. Wepfer, Der gegenwärtige Stand der geologischen Forschung. Naturwissenschaften, Jahrg. 1923, S. 923.

2) Nernst, Das Weltgebäude im Lichte der neueren Forschung. Berlin 1921, Verlag von Springer. S. 1.

lungsgleichgewicht zwischen den Gestirnen und dem Weltenraum annehmen könnte. Man scheint diesen Ausweg bisher jedoch allgemein als so offenbar mit den Tatsachen im Widerspruch angesehen zu haben, daß man seine Erörterung von vornherein abgelehnt hat. Es soll hier nun durch ganz einfache Überlegung gezeigt werden, daß eine solche Erklärung doch nicht unmöglich ist, wie sie es im ersten Augenblicke erscheint.

Wollen wir den angeblichen Energieverlust der Gestirne durch Strahlung in den Weltraum bestimmen, so müssen wir zunächst untersuchen, wie hoch die Temperatur des Weltraumes ist. Nernst[1]) versucht dieselbe folgendermaßen zu definieren: „Man denke sich in einem beliebigen Punkte irgendein Stäubchen eines schwarzen Körpers, d. h. eines solchen, der alle auffallende Strahlung absorbiert, befindlich. Dasselbe wird sich dann infolge der überall vorhandenen Strahlung auf eine bestimmte Temperatur, eben die Temperatur des Weltraumes an dem betreffenden Orte einstellen, indem es im Temperaturgleichgewicht ebensoviel Strahlung absorbiert, wie es infolge seiner Eigentemperatur ausstrahlt." Durchdenkt man diese Nernstsche Definition nun etwas weiter, so gelangt man zu einem höchst überraschenden Ergebnis. Es ist nämlich aus verschiedenen Gründen sehr wahrscheinlich, daß es außer den wahrnehmbaren Strahlen im Äther noch viele Strahlungsarten gibt, die äußerst durchdringend sind. Nernst[2]) selbst nimmt an, daß es eine ungeheure Menge solcher Strahlungen und Schwingungen gibt, die er als „Nullpunktsenergie" bezeichnet, und gibt als untere Grenze für dieselbe $0{,}36 \cdot 10^{16}$ g cal pro ccm an. Wiechert schätzt dieselbe sogar auf $0{,}9 \cdot 10^{22}$ g/cal pro ccm. Lodge gibt einen ähnlichen Wert an. Es gibt auch eine sehr einfache Erklärung dafür, warum sich diese ungeheuren Energiemengen der unmittelbaren Beobachtung entziehen. Daß unseren Sinnen viele Strahlungen verborgen sind, wissen wir längst. Aber auch die Meßinstrumente können stets nur solche Strahlen anzeigen, die sie absorbieren. Je kurzwelliger nun die Strahlen sind, in um so höherem Maße durchdringen sie die Materie, und es besteht die Möglichkeit, ja sogar die Wahrscheinlichkeit, daß es noch ungeheuer viel kurzwellige und vielleicht auch langwellige Strahlen gibt, die noch außerordentlich viel durchdringender sind, als die Röntgenstrahlung, sogar als die Gammastrahlung oder die Heßsche Strahlung. Vermutlich vermag die Materie überhaupt nur einen geringen Teil der Strahlung, nämlich den, mit dem sie zufällig in Resonanz tritt, zu absorbieren. Der größte Teil durchdringt vielleicht sogar Weltkörper ohne erhebliche Schwächung. Diese allgemeine unsichtbare und unmeßbare Strahlungsenergie oder Nullpunktsenergie des Äthers verhält sich zu der sichtbaren oder meßbaren Strahlung ähnlich wie die unhörbare Wärmebewegung der Luftmoleküle zu den hörbaren Schallwellen.

Wir nehmen nun für diese sehr durchdringenden Strahlen zunächst einmal eine ganz geringe, aber massenproportionale Absorption und Umwandlung in Wärme an. Die Wärmeerzeugung wird bei einem Körper im Raume dann etwa der Masse proportional, die Wärmeabgabe aber hängt nur von der Oberfläche ab. Bei Kugeln von gleicher Dichte wächst jedoch bekanntlich die Masse, d. h. der Inhalt, schneller als die Oberfläche. Unser Nernstsches Weltraumthermometer muß also eine um so höhere Temperatur anzeigen, je größer seine Thermometerkugel ist. Die Weltraumtemperatur läßt sich also nicht eindeutig definieren. Nun hindert uns aber nichts, statt des schwarzen Stäubchens die Weltkörper selbst als Thermometerkugeln einzuführen, und man erhält als Temperatur des Weltraumes dann je nach der Größe des Weltkörpers verschiedene Temperaturen, die eine Funktion des Radius (entsprechend dem Verhältnis Inhalt zu Oberfläche) darstellen und bei großen Massen sehr hoch sein werden. Alle diese verschiedenen hohen Temperaturen würden mit dem scheinbar dunklen und kalten Weltraum jedoch im besten Strahlungsgleichgewicht stehen können.

Man wird zugestehen müssen, daß das auf Grund einer einfachen neuen Hypothese entwickelte Bild in überraschender Weise dem ähnlich ist, was wir im Weltraum tatsächlich beobachten. Jeder Weltkörper würde dann eine vor allem von seiner Größe und Masse abhängige äußere Gleichgewichtstemperatur haben oder ihr zustreben. Im Inneren würden vermutlich starke Wärmestauungen eintreten. Die Weltkörper würden im allgemeinen um so heißer sein, je größer sie sind. Würde ein Stern durch äußere Umstände eine höhere Temperatur erhalten, so müßte er durch Ausstrahlung sich schnell wieder auf seine Normaltemperatur abkühlen, woraus sich die kurze Dauer der neuen Sterne im Vergleich zur Konstanz der übrigen Fixsterne erklären würde.

Die Annahme einer unmittelbaren Abgabe von sog. Nullpunktsenergie an die Massen zeigt auch einen Weg, auf den die in den Raum hinausgestrahlte, bisher für irreversibel verloren gehaltene Strahlungsenergie wieder zu den Massen

1) Nernst, a. a. O. S. 39.
2) Nernst, a. a. O. S. 59.

zurückkehren kann. Man braucht nur anzunehmen, daß diese Strahlung im Raume allmählich in kurzwellige Strahlen oder irgendeine unbekannte Energieform übergeht, etwa durch eine Art von Reibung im Äther. Ähnlich äußert sich Nernst[1]): „Der Lichtäther besitzt eine, wenn auch äußerst kleine Absorptionsfähigkeit für Wärmestrahlung. Damit verbunden wäre dann auch ein ebenfalls nur sehr kleines Dispersionsvermögen des Lichtäthers, das im Gebiete äußerst kurzer, uns bisher unzugänglicher Wellenlängen vielleicht sogar beträchtlich werden könnte. Denkt man sich, wie ich es in den letzten Auflagen meiner „Theoretischen Chemie" immer getan habe, den Lichtäther atomistisch, so wird letztere Konsequenz zu einer Selbstverständlichkeit. Nach meiner Auffassung hätte man sich die Absorption so vorzustellen, daß in sehr langen Zeiträumen die gewöhnliche Strahlungsenergie sich in Nullpunktsenergie des Lichtäthers umlagert". Wir möchten daher auch den Energieverlust durch Reibung nicht mehr für irreversibel halten.

Die einfache Annahme einer Energieübertragung aus dem Äther an die Materie befreit uns also von der ebenso trostlosen wie unwahrscheinlichen Lehre von der allgemeinen Energieentwertung und Sonnenerkaltung in weit vollkommener Weise, als die bekannte radioaktive Theorie, die, wie auch Emden[2]) neuerdings zugesteht, wie alle bisher zur Erklärung der Konstanz der Fixsterntemperaturen aufgestellten Erklärungen sehr wenig befriedigt.

Ansätze zu einer Theorie der Energiezuführung aus dem Raume oder Äther finden sich verschiedentlich in der physikalischen Literatur, haben aber bisher seltsamerweise auffallend wenig Beachtung gefunden[3]). Die hier vorgetragene Anschauung knüpft zunächst an Nernsts Theorie der Nullpunktsstrahlung an. Sie zeigt aber auch eine große Ähnlichkeit mit der Schwerkrafterklärung des Lesage[4]) (1724—1803), wenn man dessen „ultramundane Korpuskeln" als Strahlen oder umgekehrt die Strahlung als korpuskulare auffaßt. Die Schwerkraft stellt sich danach etwa als Strahlungsdruck der Weltraumstrahlung dar, den die Erde einseitig ein wenig abschirmt. Als erster scheint 1869 Leray in den Comptes rendus die Konstanz der Sonnentemperatur aus dieser Theorie abgeleitet zu haben. Wir würden unsere hypothetisch eingeführte Energieabsorption durch die Massen also als Schwerkraft unmittelbar fühlen können. Die Theorie stößt vorläufig noch auf gewisse Schwierigkeiten, die jedoch nicht unüberwindlich erscheinen.

Es entsteht nun die Frage, ob auf Grund der wenigen bisher gemachten Annahmen bereits die Gleichgewichtstemperatur großer Massen sich berechnen und an der Beobachtung prüfen läßt. Zunächst können gewisse qualitative Übereinstimmungen mit der Wirklichkeit hervorgehoben werden. Die Energieerzeugung soll der Masse M, die Abgabe der Oberfläche O proportional sein. Die Temperatur T wird also vermutlich eine Funktion von $\frac{M}{O}$ sein. Diese Annahme stimmt übrigens genau mit der Theorie von Eddington überein, der im Sterne eine massenproportionale Energieentwicklung unbekannter Herkunft annimmt; bisher hat man dabei allerdings wohl hauptsächlich an die radioaktive Theorie gedacht. Vielleicht sind jedoch besser umgekehrt die radioaktiven Erscheinungen durch die hier vorgebrachte Annahme einer in den Massen stattfindenden Umwandlung von unsichtbarer Ätherenergie in sichtbare Formen aufzuklären. Auch Nernst[1]) nimmt an, daß bei der Arbeitsleistung von Radioaktivität Nullpunktsenergie in äußere Arbeit übergeht. — Es ergibt sich nun ohne weiteres, daß (ebenso wie nach Eddingtons Theorie) gleiche Temperaturen für verschieden große Massen möglich sind; hohe Temperaturen können entweder bei großer Masse oder bei kleiner Oberfläche, d. h. großer Dichte erreicht werden. Man erhält so ohne weiteres die beiden Typen der „Riesen" und „Zwerge" unter den Sternen. Da die „Erkaltung" und Energieentwertung fortfällt, kann man sich die „Entwicklung" im Sinne von Wiechert[2]) in umgekehrter Weise wie bisher vorstellen. Durch Anziehung von Massen wird die Sonne allmählich heißer, bis ihr Zustand etwa im Sinne von Eddingtons Theorie labil wird und zu einer Explosion oder einem Zerfall führt, worauf der Kreislauf von neuem beginnen kann.

Weiterhin erscheint es nach unserer Vorstellung unmöglich, daß es erkaltete Sonnen geben könnte, Weltkörper von gleicher oder größerer Masse und Dichte wie die Sonne,

1) Nernst, a. a. O. S. 40.

2) Emden, Über Strahlungsgleichgewicht, Zeitschr. f. Phys. **23**, 1924, bes. S. 204 u. 205.

3) Auch eine neue Gravitationstheorie von Mohorovičić nimmt eine Energiezuführung durch Äther und Schwerkraftfeld an, vgl. dessen Aufsatz: „Äther, Materie, Gravitation und Relativitätstheorie". Zeitschr. f. Phys. **18**, 34. 1923. Über frühere Versuche des Verfassers vgl. Physik. Zeitschr. **22**, 636—639, 1921, und Naturwiss. Wochenschr. **38**, 513, 1922.

4) Vgl. Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften, Leipzig 5_1, 58.

1) Nernst, Quantentheoretische Betrachtungen. Verh. d. phys. Ges. 1916, S. 116.

2) Wiechert, Anmerkungen zur Theorie der Gravitation und über das Schicksal der Gestirne. Vierteljahrsschrift der Astronomischen Gesellschaft, 56. Jahrg., 3. Heft, 1921, S. 171 ff., bes. S. 185—191.

aber ohne Wärme. Tatsächlich hat die Beobachtung bisher auch keine Andeutung für solche Körper gegeben. Auch bei den sogenannten Finsternisveränderlichen des Algoltypus hat man kein Anzeichen für das Vorhandensein solcher Dunkelsonnen gefunden. Dagegen sind große dunkle Massen von sehr geringer Dichte, also großer Oberfläche, auch Wolken kosmischen Staubes, recht wohl auch mit unserer Vorstellung vereinbar.

Es ist nun zu untersuchen, ob eine quantitative Bestätigung der Theorie in ihrer ersten einfachen Form vorliegt, oder ob die Beobachtung ihren weiteren Ausbau fordert. Da die eingestrahlte Energie von der Masse M, die ausgestrahlte von der Oberfläche O abhängen soll, müßten Sonnen von gleicher Masse und Dichte gleiche Temperatur haben. Die Möglichkeit, beide Größen M und O zu bestimmen, scheint vor allem bei den Doppelsternen der Finsternisveränderlichen vom Algoltypus gegeben. Der Durchmesser Algols beträgt 1,7 Millionen km gegen 1,4 Millionen unserer Sonne. Aus dem Spektralcharakter berechnet sich seine Temperatur zu 11—12000° gegenüber 5900° der Sonne. Man müßte bei Algol also eine wesentlich größere Masse als bei der Sonne vermuten, diese berechnet sich aber nur etwa auf die Hälfte. Allerdings werden Doppelsterne wegen der gegenseitigen Bestrahlung — Algols Begleiter ist fast ebenso groß und steht ihm sehr nahe — etwas höhere Temperatur als einzelne Sterne zeigen, doch wird dies kaum den Unterschied erklären können. Man kann entweder annehmen, daß in der Berechnung der Massen noch ein Fehler steckt, oder daß unsere Voraussetzungen zur Erklärung noch nicht ausreichend sind.

Zunächst muß eine gewisse Unwahrscheinlichkeit hervorgehoben werden, die allen bisher erwähnten Theorien anhaftet. Aus den beobachteten Temperaturen geht zweifelsfrei hervor, daß die Energieaufnahme nicht nur massenproportional sein kann, sondern außerdem noch mit der Temperatur erheblich zunehmen muß. Man erkennt das ohne weiteres an den Verhältnissen in unserem Planetensystem. Die Masse der Sonne ist nur etwa 1000 mal so groß, wie die des Jupiter; die von der Sonne ausgestrahlte Energie ist viele Millionen mal so groß. Wir müßten also eine mit der Temperatur riesenhaft anschwellende Energieabsorption in den Massen annehmen, eine Annahme, die zwar an sich möglich ist, die aber unter anderen die oben angedeuteten Aussichten, die von der Temperatur bekanntlich unabhängige Schwere durch die hypothetische Energieabsorption zu erklären, verschließen würden. Das ungeheure Anwachsen des Energiebedarfs bei den starken Strahlern stellt auch für die radioaktive Theorie eine kaum überwindbare Schwierigkeit dar. Nernst[1]) sagt: „Wenn die Sonne ganz aus Uran bestände, würde die entwickelte Wärme etwa die Hälfte ihrer ausgestrahlten Energie decken". In einer früheren Periode soll die damals wesentlich heißere Sonne eine mehr als fünfzigfache Strahlung besessen haben; ihre Substanz müßte also hundertfach so radioaktiv wie Uran gewesen sein!

Aus all diesen Schwierigkeiten und Unwahrscheinlichkeiten führt jedoch ein Ausweg, der sich ohne weiteres aus der anschaulichen substantiellen Äthervorstellung ergibt, und der eine zwanglose Erklärung für die Herkunft der gewaltigen Energiemassen der starken Strahler ergibt.

Unsere Betrachtung ist bisher in ganz unberechtigter Einseitigkeit lediglich auf die Herkunft der ungeregelten Wärmebewegung der Massen beschränkt worden. Die Theorie kann und muß aber allgemein auf die ganze Bewegungsenergie der Massen ausgedehnt werden. Neben dem Rätsel von der Konstanz der Fixsterntemperaturen steht als ein zweites Rätsel die auffallende Konstanz der Bewegungsenergie der Weltkörper. Nach der alten Ansicht steht nur eine beschränkte Energiemenge zur Verfügung, die eigentlich durch Reibung längst verbraucht sein müßte, und man sucht den drohenden Stillstand und den Zusammensturz der Weltkörper in sehr unwahrscheinlicher Weise durch die Annahme einer Reibungslosigkeit des Raumes oder Äthers so lange wie möglich hinauszuschieben.

Auch hier läßt sich bei Berücksichtigung eines substantiellen Äthers und seiner Energie ein viel natürlicheres Bild gewinnen. Wir wissen aus Laboratoriumsversuchen, daß die Materie für den Äther außerordentlich durchdringlich ist, so daß bei Bewegung der Materie der Äther unbeeinflußt (in absoluter Ruhe) bleibt. Nach unserer Vorstellung ist die Wechselwirkung jedoch von der Größenordnung der Massenanziehung. Da diese selbst im Laboratorium nur schwer nachweisbar ist, entziehen sich Wirkungen höherer Ordnung, wie sie infolge der Bewegung der kleinen Massen im Äther zu erwarten sind, zunächst völlig der Beobachtung. Da aber der Ätherwiderstand nicht oberflächen-, sondern massenproportional vermutet wird, müssen bei Bewegung großer Weltkörper auch erhebliche Widerstände im Äther eintreten; der Äther wird von der Erde zu einem Teil

1) Nernst, a. a. O. S. 56 u. 57.

mitgerissen, worauf das Ergebnis des Michelsonschen Versuches deutet. Auch die neuere Theorie von Lenard über Äther und Uräther kommt einer solchen Vorstellung nahe. Es soll hier also der Versuch gemacht werden, die Bewegung der Weltkörper durch den Äther nicht wie üblich als „reibungslos" aufzufassen, sondern mehr materiell als Bewegung durch ein widerstehendes Mittel unter dem Einfluß einer Kraft. Bei der Trägheitsbewegung auf der Erde wird wegen der geringen Massen ein Ätherwiderstand nicht nachweisbar sein. Es muß dagegen erklärt werden, warum dieser Widerstand bei der Planetenbewegung nicht störend wirkt. Hier muß er offenbar durch eine unbekannte Kraft ausgeglichen sein und man kann sich diese in verschiedener Weise vorstellen. Die folgende kleine Rechnung soll lediglich als Beispiel für ein mögliches Modell dienen. Es soll nur gezeigt werden, daß ein Widerspruch mit der Erfahrung nicht vorliegt.

Der Reibungswiderstand, den die Erdmasse m bei ihrer Bewegung mit der Geschwindigkeit v durch den Äther findet, möge der Größe $m \cdot v^2$ proportional sein. Vielleicht ist es kein Zufall, daß die lebendige Kraft der trägen Masse formal einem solchen Reibungswiderstand entspricht. Nun dreht sich die Sonne mit ihrem Gravitationsfeld in bestimmter Richtung um sich selbst und alle Planeten folgen ihr nahezu in derselben Ebene. Die Annahme eines materiellen Zusammenhangs, wie ihn die substantielle Ätherstellung bietet, liegt hier nahe. Wir wollen uns das Sonnenschwerkraftfeld nun im Anschluß an Faradays Vorstellungen durch ein System fester Linien oder Kraftröhren veranschaulichen, die im Sinne der Sonnendrehung eine mit einem der Entfernung r vom Kraftzentrum M entsprechenden Arm an die Planetenmasse m angreifen; dann wird das diese durch den ruhenden Äther treibende Kraftmoment dem Produkt aus dem Kraftarm r und der Stärke des Feldes $\frac{m \cdot M}{r^2}$, also der Größe $\frac{m \cdot M}{r}$ proportional. Im Falle des Kräftegleichgewichts muß also $\frac{m \cdot M}{r} \sim m v^2$, oder, da M für das ganze Planetensystem eine Konstante, $\frac{1}{r} \sim v^2$ sein. Nun ist $v = \frac{2r\pi}{T}$, worin T die Umlaufszeit des Planeten ist. Da M und 2π Konstante sind, wird $\frac{1}{r} \sim \frac{r^2}{T^2}$ oder $T^2 \sim r^3$, es ist also das bekannte dritte Keplersche Gesetz auch in diesem Modell erfüllt. Allerdings gilt dieses zunächst nur für Kreisbahnen. Herr Gehrcke machte mich darauf aufmerksam, daß bei elliptischen Bahnen eine Perihelbewegung resultieren würde. Die Theorie der reibungslosen Bewegung durch den Äther nach Newton stellt offenbar nur eine, noch dazu physikalisch nicht verständliche von vielen möglichen Theorien dar. Es werden noch viele andere Modelle für die Planetenbewegung möglich sein. Es sei zum Beispiel darauf hingewiesen, daß bereits 1732 Joh. Bernoulli die Keplerschen Gesetze in einer von der Pariser Akademie preisgekrönten Arbeit aus der Ätherwirbeltheorie abgeleitet hat. Die Schwerkraft-Trägheitstheorie Newtons braucht damit nicht unvereinbar zu sein. Schwerkraft und Trägheit können eine gemeinsame Ursache haben, wie es auch beim Äquivalenzprinzip Einsteins angenommen wird. Als dieses gemeinsame Schwerkraft-Trägheitsfeld wäre dann aber der — von der Relativitätstheorie[1]) abgeschaffte — substantielle Äther anzunehmen.

Nach dieser Auffassung erfordert also jede Massenbewegung durch den Äther ähnlich wie die Wärmebewegung einen Energieaufwand zur Überwindung des Reibungswiderstandes, nur entzieht sich Energieaufnahme und -abgabe bisher unserer Beobachtung. Neben einer allgemeinen ungeregelten Energiebewegung werden wir im Äther auch gerichtete Kräfte — vielleicht sogar nur solche — annehmen können, die den Massen nicht nur die ungeregelte Wärmebewegung, sondern auch die gerichtete Bewegung erteilen. Die Annahme eines vollständigen Kreislaufs der Energie durch Äther und Materie läßt sich bei Berücksichtigung der Möglichkeit unbekannter Vorgänge nicht beweisen, aber auch nicht widerlegen. Doch spricht das Energieprinzip dafür. Wir nehmen nun an, daß es keine reibungslosen Vorgänge in der Natur gibt, und daß alles, was uns so erscheint — Planetenbewegung wie Atombewegung — einen verborgenen Mechanismus mit Energiezuführung und -ableitung aus den Äther besitzt. Wir könnten solche stationären Vorgänge etwa als quasi-reibungslos bezeichnen. Die unwahrscheinliche Vorstellung eines absolut ungreifbaren Äthers wird von der Beobachtung keineswegs gefordert und muß als unphysikalisch abgelehnt werden.

Nach unserer vervollständigten Vorstellung geben also im Äther vorhandene Bewegungen ihre Energie an die großen Massen ab und erteilen ihnen neben der ungeregelten Wärmebewegung auch ihre zusammenhängende gerichtete Bewegung. Solange die Massen klein

1) Vgl. die Ausführungen des Verfassers in der Zeitschr. f. Physik **24**, 267 u. 268, 1924.

und kalt sind, bleibt dabei ein elastischer Zusammenhang gewahrt. In dem Maße, wie die Massen heißer werden, geht der Zusammenhang verloren, die Fortbewegung wird immer turbulenter — man denke an den Anblick, den die Sonnenoberfläche darbietet — und ein rasch wachsender Anteil der Bewegungsenergie wird in Wärme verwandelt. Eine überschlägliche Berechnung zeigt, daß die Atomgeschwindigkeiten bei den hohen Temperaturen der starken Strahler von der Größenordnung der Sterngeschwindigkeiten sind. Die Herkunft der gewaltigen Energiemengen aus der Bewegungsenergie des Sternes ist ohne weiteres verständlich. Aber diese Energiequelle, die nach der bisherigen Ansicht einen begrenzten Vorrat darstellt, ist nach unserer neuen Annahme unerschöpflich, da sie einem aus dem Unendlichen kommenden Energiestrom entstammt. Unsere neue Auffassung der Bewegung der Weltkörper als Bewegung durch ein widerstehendes Mittel gibt hier eine ganz einfache Lösung für ein Problem, das bei jeder anderen Betrachtungsweise unlösbar erscheinen muß.

Es ist nun nicht ohne weiteres anzunehmen, daß die Bedingungen für die Zuführung von Bewegungsenergie in allen Teilen des Raumes die gleichen sind. Wie weit eine quantitative Bestätigung möglich ist, läßt sich daher noch nicht übersehen. Doch mögen einige Beobachtungen hier angeführt werden. Da die ausgestrahlte Energie nach dem Stefanschen Gesetz dem Produkt $O \cdot T^4$ proportional ist, worin O die Oberfläche und T die absolute Temperatur bedeutet, so müßten sonst gleiche Massen sich um so langsamer bewegen, je größer ihre Oberfläche und je höher ihre Temperatur ist. In der Tat hat man beobachtet, daß die Riesensterne sich im allgemeinen langsamer bewegen als die Zwerge. Ferner berichtet Ludendorff[1]): „Mit großer Energie hat Campbell, der Leiter der Lick-Sternwarte in Kalifornien, im Laufe der letzten beiden Jahrzehnte die Radialgeschwindigkeiten der meisten Sterne bis zur fünften Größe bestimmen lassen. — Das wichtigste Resultat, welches daraus folgt, ist, daß die Geschwindigkeiten, mit denen die Sterne sich durch den Raum bewegen, im Durchschnitt von dem Spektralcharakter der Sterne abhängen, und zwar in der Weise, daß diejenigen Sterne, die man nach ihrem Spektrum im allgemeinen für die jüngsten hält, die kleinsten Geschwindigkeiten haben, die ältesten die größten." Danach würden sich also die heißeren Sterne (wohl mit Unrecht als die „jüngsten" bezeichnet) im allgemeinen langsamer bewegen. Würde die hohe Temperatur verlangsamend auf die Bewegungen einwirken, so würde die Berechnung bei Übertragung der Bewegungsgesetze unseres Planetensystems auf heiße Doppelsterne infolge deren stärker gebremsten Bewegung die Massen zu klein ergeben. Es ist bereits auf die auffallend kleine Masse hingewiesen worden, die man für Algol errechnet hat. Tatsächlich ergibt eine Zusammenfassung aller Beobachtungen über 87 Systeme der Algolklasse, deren Größe man berechnet hat, daß diese Sterne eine auffallend geringe Dichte oder Masse haben. Nach Beobachtungen von Shapley, über die Ludendorff[1]) berichtet, ist die Dichte „nur bei einem der 87 Systeme größer als die Dichte der Sonne. Bei der überwiegenden Mehrzahl der Systeme liegt der Grenzwert zwischen 0,5 und 0,2 der Sonnendichte, und in einigen Fällen ist die Dichte fast unvorstellbar klein". Ein Fehler der Theorie in dem vermuteten Sinne ist also nicht ganz unwahrscheinlich und Algol hat vielleicht doch eine seiner Größe mehr entsprechende Masse.

Die hier gezogenen Schlüsse mögen zunächst kühn erscheinen. Sie sind aber eigentlich nur die notwendige Folge der Annahme eines substantiellen Äthers, der bei den Theorien bisher mit einer gewissen Absichtlichkeit ausgeschaltet wird. Es mag befremden, daß die gewaltigsten kosmischen Wirkungen, wie die Sonnenstrahlung, auf Eigenschaften der Stoffe zurückgeführt werden, die im Laboratorium bisher nicht beobachtet wurden. Dasselbe ist jedoch auch mit der nach Newton den Kosmos beherrschenden Schwere der Fall, auch sie beruht auf einer Eigenschaft der Stoffe, der Massenanziehung, die im Laboratorium nur mit besonders feinen Instrumenten nachweisbar ist. Im Laboratorium und im Kosmos treten offenbar ganz verschiedene Eigenschaften der Materie in den Vordergrund; hier sind es mehr die Tiefenwirkungen, dort mehr die Oberflächenwirkungen.

Das Problem der Fixsternstrahlung offenbart eine gewaltige Lücke im System der Physik. Es wäre geradezu unwissenschaftlich, wenn man sie nur unter Berücksichtigung der bekannten Energieformen schließen wollte. Mit Recht bezeichnet Lenard[2]) die von verschiedenen Seiten geforderte Beschränkung auf das unmittelbar Beobachtbare als „unmenschlich, weil sie die Fähigkeit des Menschengeistes und sein eingewurzeltes Streben, die verborgenen Mitspieler

1) Ludendorff, Die neuesten Fortschritte der Fixsternkunde. Naturwissenschaften **3**, 43—45, 1915.

1) Ludendorff, Die neuesten Fortschritte der Fixsternkunde. Naturwissenschaften **3**, 43—45, 1915.

2) Lenard, Über Relativitätsprinzip, Äther, Gravitation. Jahrb. d. Radioakt. u. Elektr. **15**, 117—136, 1918.

in treffender Weise hinzuzudichten, von sich weist". Weiter möchte ich meine Ausführungen zum Schluß noch mit Nernsts[1]) Worten rechtfertigen: „Kosmische Physik ist nicht gewöhnliche Physik; was hier als unbewiesene Spekulation zu mißbilligen ist, kann dort zu einer Denknotwendigkeit werden, die mit unaufhaltsamer Kraft sich der Forschung aufdrängt".

1) Nernst, a. a. O. S. 37.

(Eingegangen 31. März 1926.)

ZUSAMMENFASSENDE BERICHTE.

Besorgt von R. Seeliger.

Abkühlung heißer Körper in Gasen und Flüssigkeiten. II.[1])

Von J. Schmekel.

Im Anschluß an den zusammenfassenden Bericht von R. Seeliger über die Abkühlung eines heißen Körpers in ruhender Flüssigkeit (55), sei im folgenden die erzwungene Abkühlung im Flüssigkeitsstrom behandelt. Auch hier sehen wir von dem Wärmeverlust durch Strahlung ab, und betrachten nur den durch Leitung und Konvektion hervorgerufenen. Trotzdem es sich hier um ein großes und wichtiges Gebiet der Technik handelt, sollen technische Anwendungen hier nicht besprochen werden (s. dazu Royds (51), Gröber (21).

In dem 1. Stadium der Erforschung dieses Gegenstandes versuchte man auf Grund von Versuchen ein der Abkühlung in ruhendem Zustand analoges Gesetz aufzustellen, in dem der Koeffizient der äußeren Wärmeleitung, hier meist Wärmeübergangszahl genannt, für die verschiedenen Stoffpaare bestimmt wurde. Es heißt z. B., die Wärmeübergangszahl von *Fe* an Luft ist $305 \frac{\text{W. E.}}{\text{St.m}^2{}^0C}$ groß ohne alle anderen Angaben, sie wurde als Konstante betrachtet. Erst später wurde die Inkonstanz dieser Größe von experimenteller Seite nachgewiesen und von der Theorie ihr komplizierter Aufbau gezeigt. Durch das Hinzukommen der theoretischen Betrachtung wurde in vielen Fällen der Hinweis gegeben, welche Größenverhältnisse besonderer Beachtung wert seien, ohne zu denken an die Zusammenfassung verschiedener Vorgänge zu größeren Gruppen, von denen wir zunächst die beiden größten als Einteilung benutzen, die laminare und turbulente Strömung.

§ 1. Die reibungslose laminare Flüssigkeitsströmung.

Von der Abkühlung durch einen laminaren Flüssigkeitsstrom hat zuerst Boussinesq (4, 5, 6, 7) sich ein theoretisches Bild zu machen versucht. Hier laufen ja die Stromlinien parallel zu den Wänden des begrenzenden Körpers. Wenn wir uns zunächst auf eine Potentialströmung ohne Berücksichtigung der inneren Reibung beschränken und uns an die Bezeichnungsweise des oben erwähnten Berichtes über die ruhenden Flüssigkeiten anschließen, so lauten die Gleichungen:

$$\text{(I)}\quad \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0.$$

$$\text{II)}\quad \frac{1}{\varrho}\frac{\partial P}{\partial x}=-u'; \qquad \frac{1}{\varrho}\frac{\partial P}{\partial y}=-v',$$

$$\frac{1}{\varrho}\frac{\partial P}{\partial z}=-w'-gaT,$$

$$\text{(III)}\quad T'=\frac{K}{C}\Delta T.$$

Zu diesen Gleichungen treten nur noch als Grenzbedingungen:

$$\text{(IV)}\quad \lambda u+\mu v+\nu w=0, \quad T=a\cdot\psi$$

an der Oberfläche des Körpers

$$u,\ v,\ w=lV,\ mV,\ nV; \quad P,\ T=0$$

in großer Entfernung vom Körper. Die 1. Bedingung sagt aus, daß an der Oberfläche die Körper- und Flüssigkeitstemperatur übereinstimmen und daß die hydrodynamischen Strömungslinien senkrecht zur Körpernormale (λ, μ, ν) stehen, es ist dieselbe Bedingung wie für ruhende Flüssigkeiten. Die 2. sagt, daß in großer Entfernung Druck und Temperatur gleich null werden und daß dort die Geschwindigkeitskomponenten proportional der Geschwindigkeit der ungestörten Strömung ist. Die gestrichenen Größen sind dabei die totalen Differentialquotienten nach der Zeit. Die Gleichung (I) bedeutet dabei die bekannte Kontinuitätsgleichung für inkompressible Medien. (II) sind die Bewegungsgleichungen der Hydrodynamik. Den scheinbaren Widerspruch der Gleichung (I) zu der Grundannahme der Theorie, daß nur durch Dichteänderungen ein Auftrieb und damit eine Konvektionsströmung erzeugt werden kann, hebt Boussinesq durch die Annahme auf, daß Volumenänderungen nur

1) I.: Diese Zeitschr. **26**, 282, 1925.

insofern in Betracht kommen, als sie das Gewicht der Volumeneinheit ändern. Über die dadurch hervorgerufene Beschränkung des Geltungsbereiches siehe den Bericht von R. Seeliger (55) S. 284. Das für den Auftrieb charakteristische Glied gaT findet sich in den Bewegungsgleichungen (II). (III) ist die Wärmeleitungsgleichung für bewegte Medien. Boussinesq vereinfacht weiter das Gleichungssystem durch die Vernachlässigung des Gliedes gaT, d. h. er vernachlässigt den Auftrieb. Dieser Zustand wird sich immer physikalisch dadurch realisieren lassen, daß durch genügend große Strömungsgeschwindigkeit, genügend kleine Wärmeleitfähigkeit, genügend kleine Temperaturunterschiede oder mehrere dieser Ursachen sich nur eine verhältnismäßig dünne, dem Körper anliegende Schicht erwärmt. Hiermit sind weitere Beschränkungen des Geltungsbereichs der Theorie gegeben und wir werden auf keine Übereinstimmung mit Experimenten in einem Gebiet zu rechnen haben, in dem sich größere Flüssigkeitsmassen bei kleiner Stromgeschwindigkeit unter dem Einfluß von Konvektionsströmen erwärmen. Wie weit man hier aber dann noch von Laminarströmung sprechen kann, erscheint zweifelhaft, da ja die Laminarströmung durch die Konvektion gestört wird. — Durch diese beschränkenden Annahmen werden nun aber die Gleichungen sehr vereinfacht gegenüber den für freie Abkühlung geltenden, und zwar insofern, als in diesem System T von den übrigen Variablen u, v, w, P getrennt ist und dadurch jede Lösung der Gleichungen (I), (II) mit jeder der Gleichung (III) kombiniert, zu einer Beantwortung des Problems herangezogen werden kann, ebenso wie wenn T oder a gleich Null wären.

Boussinesq betrachtet nun zunächst ähnliche Körper, die um das Maß i sich unterscheiden und also der Gleichung

$$f(x/i,\ y/i,\ z/i) = 0$$

genügen. Es gelingt ihm durch Einführung neuer Variablen die für die einzelnen Flüssigkeiten charakteristischen Parameter zu eliminieren. Die Transformationen lauten:

$$\xi, \eta, \zeta = \frac{x}{i}, \frac{y}{i}, \frac{z}{i};\quad u, v, w = v \cdot (U, V, W),$$

$$P = \varrho v^2 \Pi;\quad \Xi = \Theta T.$$

Ebenso wie die Gleichungen nehmen auch die Grenzbedingungen (IV) durch diese Transformationen eine von den speziellen Körpern unabhängige Form an und man findet als Lösung zunächst

$$\Xi = \Xi\left(\xi,\ \eta,\ \zeta,\ \frac{K}{Cvi}\right)$$

und mit Hilfe des durch das Einheitsvolumen gehenden Wärmeflusses die gesamte abströmende Wärme

$$Q = \frac{K\Theta}{i} \cdot f\left(\frac{K}{Cvi}\right),$$

d. h. bei der Proportionalität mit dem Temperaturüberschuß gehorcht der Wärmefluß dem Newtonschen Abkühlungsgesetz. Abgesehen davon ist der Wärmefluß noch eine Funktion von Cv, der spezifischen Wärme des vorüberfließenden Flüssigkeitsvolumens und der Wärmeleitfähigkeit K/i. Durch die Vereinfachungen gegenüber den Verhältnissen der freien Abkühlung ist es nun möglich, in diesem Ähnlichkeitsgesetz auch noch die Art der Funktion an dem einfachsten Beispiel einer unendlich dünnen Halbebene zu bestimmen, die in ihrer Längsrichtung auf beiden Seiten vom Flüssigkeitsstrom gekühlt wird. Wenn man nämlich annimmt, daß sich die Temperatur der dünnen erwärmten Schicht in der Stromrichtung im Verhältnis zur dazu senkrechten wenig ändert, kann man in dem Symbol ΔT $\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$ gegen $\frac{d^2 T}{dx^2}$ vernachlässigen. In diesem Falle berechnet Boussinesq einen gesamten Wärmefluß

$$Q = \sqrt{\frac{KCV}{\pi}} \sum \frac{d\Theta}{\sqrt{\delta}} \qquad (1)$$

Hier bedeutet $d\Theta$ den Zuwachs der Temperatur auf die Strecke δ des Flüssigkeitsfadens hin. Die Gültigkeit dieser Formel bleibt auch noch bestehen, wenn die Platte in irgendeiner Richtung gekrümmt ist, wenn nur die Schichtdicke im Verhältnis zum Krümmungsradius vernachlässigt werden kann. Man kann in jedem Falle nicht von einer eigentlichen Integration reden, denn über den zur Strecke δ gehörigen Temperaturzuwachs vermag die Formel nichts auszusagen, ebensowenig auch über den weiteren Verlauf der Temperatur im nächsten δ-Abschnitt. Im allgemeinen wird ja h schwächer und schwächer werden, um schließlich zu verschwinden, wenn die ganze Schicht erwärmt ist. Genaueres läßt sich aber nicht feststellen, denn selbst in einem vollkommen konstanten Strom kann man die Temperaturverteilung in einem Punkte mit dieser Methode nicht vorausbestimmen. Der Gesamtfluß ist vielmehr als proportional dem Mittel der Überschußtemperatur anzusetzen. Der Proportionalitätskoeffizient, die schon oben erwähnte äußere Leitfähigkeit oder Wärmeübergangszahl h, ist hierbei gegeben durch $\sqrt{\frac{KCV}{L}}$, wo L der Weg der Flüssigkeit längs der Platte ist.

Dieser Koeffizient findet sich auch, worauf Boussinesq aufmerksam macht, in ruhender Flüssigkeit in ähnlicher Form wieder, denn dort tritt die Größe $\sqrt{KC}$ auf. Bei kleinen Geschwindigkeiten läßt sich die Abhängigkeit von der Temperatur durch $\Theta^{1,1}$ darstellen, was etwa in der Mitte zwischen $\Theta^{1,0}$ für starke Strömung und $\Theta^{1,233}$ für ruhende Flüssigkeit liegt. Dieser Proportionalitätskoeffizient α ist aber nur scheinbar konstant, denn seine Variation läßt sich nicht von der der Größe $\Sigma d\Theta$ trennen. Diesen Koeffizienten konnte Boussinesq für verschiedene Körper berechnen, immer unter der Annahme der Anwendbarkeit der letzten Formel,

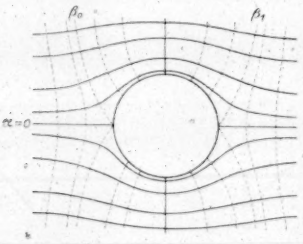


Fig. 1.

also für verhältnismäßig große Körper mit großem Krümmungsradius im Verhältnis zur Schichtdicke. Von seinen zahlreichen Resultaten sei hier nur die Formel für den allgemeinen Zylinder angeführt

$$h_z = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{KCV}{L}} \cdot \frac{\beta_1 - \beta_0}{L},$$

wenn mit β_0 und β_1 die Koordinaten des Trennungs- und Wiedervereinigungspunktes des Zentralfadens bezeichnet wird. Als Spezialisierung treten hier auf für den Kreiszylinder

$$Q = h \cdot \Theta f = \frac{8b}{\sqrt{\pi}} \sqrt{KCVL} \cdot \Theta$$

und für eine dünne Platte

$$Q = \Theta \cdot \frac{4b}{\sqrt{\pi}} \sqrt{KCVL},$$

wenn b die Breite ist.

Eine Erweiterung des Bereichs der Boussinesqschen Annäherung rührt her von King (26) für dünne Drähte, bei denen man nicht mehr $\frac{d^2\Theta}{dz^2}$ vernachlässigen kann. Durch die Annahme einer linearen Quellenverteilung und unter der weiteren Annahme (die am besten mit den Versuchen übereinstimmt), daß der Wärmefluß durch jedes Flächenelement konstant ist, kann er das Gleichungssystem integrieren. Den Abschluß dieses ganzen Fragenkomplexes im zweidimensionalen Gebiet bildet eine Arbeit von K. Aichi[1] (2), der durch eine mathematisch eingehende Diskussion der von Boussinesq transformierten Gleichung eine allgemeine Lösung findet, in der die Boussinesqsche Form wie auch die Kingsche enthalten ist.

Wenn man mit King die Stärke und Verteilung der Wärmequellen längs der Oberfläche als gegeben ansieht (ξ, η ein an der Oberfläche des Körpers gegebenes Koordinatensystem), so erhält Aichi als vollständige Lösung der Gleichung das Temperaturfeld im Punkte α, β, der durch die Strom- bzw. Äquipotentiallinien gegeben ist,

$$\Theta(\alpha,\beta) = \frac{1}{2\pi K} \int_{\beta_0}^{\beta_1} Q_2(\eta)\, h_1|_{\alpha=0} \cdot d\eta\, e^{n(\beta-\eta)} K_0\left(n\sqrt{\alpha^2+(\beta-\eta)^2}\right),$$

die sich von der Kingschen nur durch den Faktor h_1 unterscheidet, der definiert ist durch $d\beta = h\,ds$, also den Richtungskosinus zwischen $d\beta$ und dem Elementarteilchen ds der Oberfläche des Körpers bedeutet. $n = \frac{1}{2}\frac{CV}{K}$; $K_0(\,)$ bedeutet die Lösung der modifizierten Besselschen Gleichung von der nullten Ordnung, die für unendliches Argument null wird. Ebenso erhielt er, wenn die Temperatur vorgeschrieben ist, wie es bei Boussinesq angenommen wird:

$$\Theta = f(\eta) \text{ von } \eta = \beta_0 \text{ bis } \eta = \beta_1.$$

Das Temperaturfeld:

$$\Theta(\alpha,\beta) = -\frac{n}{\pi} \int_{\beta_0}^{\beta_1} f(\eta)\, d\eta\, e^{n(\beta-\eta)} \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+(\beta-\eta)^2}},$$

$$\left(\frac{d}{d\xi}\left(K_0\left(n\sqrt{\alpha^2+(\beta-\eta)^2}\right)\right)\right)_{\xi} = 0.$$

Aus diesen Formeln kann man ja mit Hilfe der Formel (1) die abgegebene Wärmemenge berechnen. Unter der speziellen Annahme, daß n groß sei, gewinnt er so auch die von Boussinesq und King gewonnenen Formeln, die durch einen Vergleich ergeben, daß sich die Gesamtwärmeverluste Q bei Boussinesq und King durch die verschiedenen Annahmen verhalten, wie $4 : \pi$ also

$$\frac{Q_{\text{Bouss.}}}{Q_{\text{King}}} = \frac{4}{\pi} = \frac{(Q_{\text{bei konst. Temp.}})}{(Q_{\text{bei konst. } h})}.$$

1) Siehe dazu auch K. Aichi Proc. Japan. 3 I p. 308, woselbst auch ältere Literatur über diese Gleichung.

Für kleines n oder kleines v, für das ja die Kingsche Formel eigentlich nicht abgeleitet war, erhält er wie jener hier

$$Q = 2\pi K \frac{\Theta\left(o, \frac{\beta_1}{2}\right)}{\log \frac{4e}{\gamma n \beta_1}}$$

unter der Annahme, daß für den Punkt $o, \frac{\beta_1}{2}$ die Mitteltemperatur des Körpers angenommen wird, im Gegensatz zu King, der diese (vielleicht weniger gut) im Punkte β_1 annimmt, und dessen Formeln sich dann entsprechend ändern. Analog erhält er für konstante auf α von β_0 bis β_1 vorgeschriebene Körpertemperatur

$$Q = 2\pi K \Theta_0 / \log \frac{4}{\gamma n \beta}; \quad \gamma = 1{,}711.$$

Erwähnt sei hier schließlich noch die elegante Methode der Dimensionalvergleichung. Rayleigh (48) erhält aus dem allgemeinen Ansatz $F = a^x \Theta^y v^z c^u z^w$ durch sie $Q = Kl\Theta F(bvc/K)$ wo unter l und b die Länge und Breite der Platte zu verstehen sind. Wenn nun durch einen Versuch oder z. B. aus der Boussinesqschen Theorie die Form der Funktion näher bestimmt wird, so gelangt man auf viel kürzerem Wege zu der mit der Boussinesqschen Formel übereinstimmenden $Q = Kl\Theta\sqrt{bvc/K}$. Die Bestimmung der Funktion durch einen Versuch würde dabei auch noch das Gebiet der langsamen Strömung umfassen und erlauben, die gesamte Lösung durch einen dem Aichischen analogen Ausdruck wiederzugeben.

Ein interessanter Vergleich, den schon King (26) zieht, ist gegeben durch die Größe der Kühlung der langsamen Strömung und der bei ruhender Flüssigkeit in der Fassung von Langmuir (30, 55). Denn dort heißt es auch

$$Q = \frac{2\pi\varphi(T_0, T_1)}{\ln b/a},$$

wobei T_0 die Flüssigkeits- und T_1 die Körpertemperatur ist. Ob aber die durch ähnliche Formeln dargestellten physikalischen Vorgänge nur auch so ähnlich sind wie diese, läßt sich nicht ohne weiteres entscheiden, denn bei der erzwungenen Kühlung sind durch die Vernachlässigung der Größe gaT (s. o.) von vornherein Konvektionsströme ausgeschlossen und man kann nicht bei der Schwierigkeit der Theorie und des Experiments auch auf ein tatsächliches Fehlen der Konvektion schließen. Eine Stütze dieser Annahme wären die Photographien in parallelem Licht und mit der Schlierenmethode, die Roy (47) und Pramanik (46) in Luft gemacht haben, und die um den Heizdraht eine ruhende, heiße Gashaut allerdings nicht sehr deutlich erkennen lassen. Dagegen würde sprechen, daß sich gerade bei langsamer Geschwindigkeit Konvektionsströme besser ausbilden und bemerkbar machen müssen und insofern ist die Formel gewissen Beschränkungen unterworfen, die in der Ungültigkeit der Voraussetzungen beruhen.

§ 2. Einführung der inneren Reibung.

Während die Betrachtungen im § 1 nur für den Vergleich verschiedener Gase oder verschiedener Geschwindigkeiten derselben Flüssigkeit Geltung haben, wird die Theorie durch Einführung der inneren Reibung auf einen Bereich ausgedehnt, der auch den Vergleich verschiedener tropfbarer Flüssigkeiten und Gase untereinander zuläßt und auch hinsichtlich des Temperaturintervalls bei ersteren einen größeren Spielraum läßt.

Die Herleitung von Modellregeln verläuft ganz analog wie oben und knüpft entweder an die Methode der Dimensionalvergleichung oder an die Diskussion der Differentialgleichungen an. Der erstere Weg von Rayleigh (48) führt durch Hinzunahme des kinematischen Reibungskoeffizienten zu dem oben angeführten Gesetz zu der Formel

$$h \sim \frac{K\Theta}{l} F\left(\frac{avC}{K}, \frac{Cv}{K}\right).$$

In dem 2. Falle lauten die den Gleichungen I—III entsprechenden

$$\text{I}' \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

$$\text{II}' \quad \begin{aligned} \frac{1}{\varrho}\frac{\partial P}{\partial x} &= -u' + \nu \Delta u, \\ \frac{1}{\varrho}\frac{\partial P}{\partial y} &= -v' + \nu \Delta v, \\ \frac{1}{\varrho}\frac{\partial P}{\partial z} &= -w' + \nu \Delta w = gaT, \end{aligned}$$

$$\text{III}' \quad T' = \frac{K}{C}\Delta T,$$

Hierbei soll, wie in dem § 1 die Größe gaT, die den Auftrieb und damit die Konvektionsströme mißt, weggelassen werden. Wir können nur also solche Messungen zum Vergleich heranziehen, bei denen sich durch geringe Temperaturdifferenz oder große Strömungsgeschwindigkeit nur eine dünne Schicht erwärmt hat. Mit denselben Grenzbedingungen wie Boussinesq (8) kann dann Davis (17) durch eine Transformation wieder die Ausschaltung der individuellen Materialkonstanten erreichen, ohne

daß der Bau der Gleichungen geändert wird. Sie sind dargestellt durch

$$\xi, \eta, \zeta = \left(\frac{v_\infty}{\nu}\right) x, y, z, \quad u, v, w = v_\infty (U, V, W),$$

$$\Xi = \Theta T, \quad P = \varrho v_\infty^2 \Pi \cdot \frac{C\nu}{K}, \quad t = \left(\frac{\nu}{v_\infty}\right)^2 t.$$

Diese bleiben jedoch nur in Geltung für Gase, bei denen $\frac{C\nu}{K} = 1$ gesetzt ist, oder für starkreibende Flüssigkeiten, bei denen $u', v', w' \ll \Delta u, v, w$ ist. Über den tatsächlichen Geltungsbereich kann natürlich nur durch das Experiment entschieden werden. Davis erhält so für ähnliche Körper, bei denen $\frac{Lv}{v_\infty}$ konstant ist, die Dimensionsformel $h \sim K v_\infty \frac{\Theta}{\nu}$, oder in etwas anderer Fassung (17, 19)

$$h = \left(K v_\infty \frac{\Theta}{\nu}\right) f\left(\frac{v_\infty L}{\nu}, \frac{v_\infty^2 t}{\nu}\right).$$

Im stationären Fall ist dann

$$\frac{hL}{K\Theta} = F\left(v_\infty \frac{LC}{K}, \frac{Cv}{K}\right).$$

Diese Formel geht über in die Formel

$$\frac{hL}{h\Theta} = F\left(v_\infty \frac{LC}{K}\right)$$

für den Fall sehr viskoser Flüssigkeiten. Dabei ist bemerkenswert, daß für Flüssigkeiten großer Viskosität wie für solche verschwindender Reibung dieselbe Formel gilt.

Eine vielleicht noch umfassendere Anwendung des Ähnlichkeitsprinzips hat schon vor Davis Nusselt (34) gemacht. Er erhält durch den Ansatz der oben angegebenen Gleichungen für Bewegung und Wärmeabgabe bei zwei ähnlichen Zuständen für die Ähnlichkeitskoeffizienten eine Reihe charakteristischer dimensionsloser Größen, die sich durch eine nähere Diskusion auf die zwei Versuchsparameter $\frac{v_\infty d}{a}$ und $\frac{a}{\nu}$ für Zylinder reduzieren. Es ergibt sich dann für den Wärmeverlust bei Zylindern

$$h = \varkappa k L \psi\left(\frac{v_\infty d}{a}, \frac{a}{\nu}\right)$$

und im Rohr

$$h = K \Theta_a d \psi\left(\frac{L}{d}, \frac{v_\infty l_0}{\nu}, \frac{a}{v_\infty l_0}\right),$$

wobei $a = \sqrt{\frac{K}{C\nu}}$ ist. In ganz analoger Weise kann diese Methode auch auf ruhende Flüssigkeiten übertragen werden. Dies ist von Nusselt auch in einer Arbeit (36) unternommen, die leider im ersten Teil versehentlich unberücksichtigt blieb. Er erhält darin genau die gleichen Resultate wie Davis schon vor diesem. Die Darstellung ist hierbei elementarer wie die Davissche. Die Schwierigkeit liegt aber wohl darin, daß man angeben muß, wo solche ähnlichen Zustände vorhanden sind. Die Bedingungen dazu liegen aber in den vielen einzelnen dimensionslosen Größen bzw. ihren Bedingungsgleichungen enthalten und wegen ihrer Anzahl läßt sich also der Gültigkeitsbereich der gefundenen Formel schwerer abschätzen.

In allen diesen Betrachtungen, die auf die Abfassung von Modellregeln hinauslaufen, bleibt naturgemäß eine unbestimmte Funktion erhalten. Während diese im § 1 bei idealen Flüssigkeiten an einfachen Spezialfällen bestimmt werden konnte, ist das hier nicht mehr möglich und es muß eine andere Methode zur Hilfe genommen werden. In dieser Richtung liegen 2 Arbeiten von Davis (15), der im Anschluß an Reynolds (49) die Wärmeabgabe mit dem Strömungswiderstand bzw. mit der äquivalenten Reynoldsschen Zahl vergleicht. Die experimentellen Ergebnisse sind in § 4 berücksichtigt. In diesem Falle ist der von Reynolds intuitiv erkannte Zusammenhang zwischen Reibungswiderstand und Wärmeabgabe als ähnlichen Vorgängen benutzt, der dann von Prandtl (44, 45) in seiner Grenzschichtentheorie ausgebaut wurde, die eben in dieser Ähnlichkeit der Wärmeleitung und -konvektion mit der inneren Reibung und Impulskonvektion beruht. Mit Hilfe dieser Arbeiten gelang es Pohlhausen (43), die oben erwähnte unbekannte Funktion im zweidimensionalen Fall für nicht große ν, K zu bestimmen durch Übertragung der Grenzschichtentheorie auf die laminare Strömung. Zur Lösung der dabei auftretenden Gleichungen diente ihm die gleichfalls von Prandtl (45) zuerst angegebene Vereinfachungsmethode innerhalb dieser Schicht durch Abschätzung und passende Vernachlässigung der einzelnen Glieder. Sein Gedankengang ist ungefähr folgender. Wir wollen, wie schon oben, unter α die Stromlinien und unter β die dazu senkrechten verstehen. Es steigt dann in der Grenzschicht von der Dicke ε, die in jeder reibenden Flüssigkeit an dem festen Körper haftet, die Geschwindigkeit von o bis v_∞, der Geschwindigkeit der Potentialströmung. Dann muß also $\frac{du}{d\beta}$ von der Größenordnung $\frac{1}{\varepsilon}$ sein oder $\frac{\partial^2 u}{d\beta^2}$ von der Größenordnung $\frac{1}{\varepsilon^2}$, während $\frac{\partial u}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2}$ als

für die Abschätzung ohne Wert von der Größenordnung 1 angenommen werden können. Unter der analogen Annahme einer Schichtdicke ε_1, in der die Temperatur von 0 bis Θ ansteigt, folgt $\frac{\partial \Theta}{\partial \beta}$ von der Größenordnung $\frac{1}{\varepsilon_1}$. Wenn dann die einzelnen Gleichungen des Problems (I—IV) unter diesen Annahmen diskutiert werden, ergibt sich, daß innere Reibung und Wärmeleitung nur von Einfluß sind, wenn ν von der Größenordnung ε^2 und K von der Größenordnung $\varepsilon_1{}^2$ sind, mit anderen Worten wenn die Grenzschichtendicke $\varepsilon = \sqrt{\nu}$ und $\varepsilon_1 = \sqrt{K}$ sind. Wenn nun ν und K von der gleichen Größenordnung klein sind, dann gehen die Gleichungen (I—IV) über in die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}
&\text{I}' \qquad \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{\partial v}{\partial \beta} = 0,\\
&\text{II}'' \qquad \nu \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} = u \frac{\partial u}{\partial \alpha} + v \frac{\partial u}{\partial \beta},\\
&\text{III}' \qquad K \frac{\partial^2 T}{\partial \beta^2} = \varrho c \left(u \frac{\partial T}{\partial \alpha} + v \frac{\partial T}{\partial \beta} \right),\\
&\text{IV}'' \quad \text{für } \beta = 0 \qquad u v = 0\\
&\qquad\quad \text{„ } \beta = \infty \qquad u = u_\infty = \text{const.}
\end{aligned}\right| \qquad (13)$$

Diese Gleichungen erlauben im Falle einer einseitig bespülten dünnen Ebene durch den bekannten Ansatz eines Geschwindigkeitspotentials und durch eine passende Koordinatentransformation eine Lösung. Die Substitution ist gegeben durch folgende Gleichungen

$$\xi = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{u_\infty}{\nu}} \cdot \frac{\beta}{\alpha}; \quad \psi = \sqrt{\nu u_\infty}\, \sqrt{\alpha}\, \zeta(\xi);$$
$$T = T_1 - (T_1 - T_0) \cdot \Theta(\xi).$$

Hier bedeutet $\zeta(\xi)$ eine komplizierte, von Blasius (10) berechnete Funktion, T_1 die Temperatur des heißen Körpers, T_0 die der Flüssigkeit. Unter Benutzung des schon von Boussinesq angewandten, hier aber präziser gefaßten Ansatzes für die übertragene Wärmemenge

$$Q = -K \int_F \left(\frac{\partial T}{\partial \beta} \right)_{\beta = 0} dF,$$

wo F die Kühlfläche ist, findet er als Resultat

$$Q = \alpha(\sigma) \cdot K \cdot \sqrt{\frac{u_\infty l}{\nu}} \cdot b (T_1 - T_0);$$

l und b sind Länge und Breite der Kühlfläche, σ die dimensionale Größe $\frac{\nu \varrho c}{K}$ und

$$\alpha(\sigma) = \frac{1}{\int_0^\infty e^{-\sigma \int_0^\xi \varrho(\xi)}\, d\xi}$$

eine Funktion, die auch bei Pohlhausen graphisch dargestellt ist.

Wenn wir die Abhängigkeit der abgegebenen Wärmemenge von der Geschwindigkeit herausgreifen und dieselbe in den von Davis (15, 19) und Rayleigh (48) abgeleiteten Formeln annehmen, so erhalten wir nach Davis für Zylinder

$$Q = m K b \Theta \sqrt{\frac{l v C}{K}, \frac{C \nu}{K}}$$

und nach Rayleigh

$$Q = m K b \Theta \sqrt{\frac{l v C}{K}, \frac{C \nu}{K}}$$

in vollkommener Übereinstimmung mit Pohlhausen, wobei diese Formel durch Division der Argumente in die Pohlhausensche Form übergeht und nur die Proportionalitätskoeffizienten $\alpha(\sigma)$ und m verschieden sind. Daß eine derartige Potenzform bestand, hätte vielleicht schon aus dem Boussinesqschen Ansatz (8) für verschwindende innere Reibung geschlossen werden können. Für Gase mit $\frac{c\nu}{K} = 1$, für Flüssigkeiten mit kleiner Wärmeleitung und Reibung und schließlich für Flüssigkeiten mit großer innerer Reibung gelten die hier angeführten Betrachtungen, so daß wohl nahezu das ganze Gebiet behandelt ist. Der Bereich des durch die verschiedenen Theorien überdeckten Gebietes läßt sich naturgemäß mangels einer vollständigen Diskussion der Gleichungen nur durch Versuche bestimmen. Es fehlt vor allem noch wie bei den idealen Flüssigkeiten die Diskussion für kleine Geschwindigkeiten, bei der das Glied gaT, das den Auftrieb bestimmte, nicht mehr zu vernachlässigen wäre und die Hinzunahme der Temperaturabhängigkeit der verschiedenen Versuchskonstanten (s. den Bericht von R. Seeliger (55) S. 286).

Zu erwähnen ist hier noch die Rechnung von W. Nusselt (35) über die Wärmeabgabe eines durchströmten Rohres. Unter der Annahme einer parabolischen Geschwindigkeitsverteilung und Vernachlässigung des axialen Wärmestromes diskutiert er die Fouriersche verallgemeinerte Wärmeleitungsgleichung und löst sie durch Ansatz von e-Funktionen als partikulären Integralen. Seine Lösung lautet zunächst für das Temperaturfeld

$$\Theta = 1{,}48\, \Theta_a\, e^{-3{,}56 \cdot \frac{a}{v_m R} \cdot \frac{z}{R}} \cdot R_0\left(\frac{r}{R}\right)$$
$$- 0{,}81\, \Theta_a\, e^{-22{,}178 \cdot \frac{a}{v_m R} \cdot \frac{z}{R}} \cdot R_0\left(\frac{r}{R}\right)$$
$$+ 0{,}35\, \Theta_a\, e^{-305 \cdot \frac{a}{v_m R} \cdot \frac{z}{R}} \cdot R_0\left(\frac{r}{R}\right)$$

wo $R_0, R_1, R_2 \ldots$ oszillierende, dem Besselschen ähnliche Funktionen von $\frac{r}{R}$ sind. Aus diesen kann dann leicht die übergehende Wärme berechnet werden

$$Q = \frac{K}{d}\,\psi\left(\frac{z}{d}, \left(\frac{a}{v_m d}\right)_z\right),$$

die sich auch für höhere Geschwindigkeiten, d. h. kleine erwärmte Schichten angenähert als Potenzfunktion darstellen läßt. Diese Behandlungsweise ist ähnlich der von King (26) und Aichi (2) eingeschlagenen und führt auch zu einem ähnlichen Resultat, das sowohl langsame wie schnelle Bewegung umfassen kann. Wenn nämlich hier die erwärmte Schicht nicht mehr vernachlässigenswert dünn im Verhältnis zum Radius ist, bleiben die oben formulierten Grenzbedingungen für unendliche Entfernung nicht mehr in Geltung. Trotzdem könnte man wohl durch geeignete Wahl des Geschwindigkeitsprofils vielleicht eine Ausdehnung des Lösungsbereiches erreichen und so einen Fall diskutieren, in dem der Auftrieb der erwärmten Flüssigkeitsteilchen eine Rolle spielte. Hierzu gehört auch die Theorie von Rice (50), die auf demselben Grundgedanken aufgebaut ist, wie die Prandtl-Kármánsche Theorie der Wärmeabgabe. Auch er berechnet eine Schicht, die dem heißen Körper anhaftet und in der sich der gesamte Temperaturabfall ausbildet; mittels einer Dimensionalvergleichung und des Ansatzes $Q = K\left(\frac{\eta}{\varrho l v}\right)^{\alpha}$ erhält er einen Ausdruck wie Boussinesq, Nusselt und Davis:

$$Q = \left(\frac{AKt}{K_0 l}\right)\left(\frac{\eta c_p}{K}\right)^{\beta}\left(\frac{\varrho l v}{\eta}\right)^{\alpha},$$

wobei K_0, α, β numerische Konstanten sind. Bei der Spezialisierung auf Röhren, nimmt er aber im Gegensatz zu Nusselt (34) eine völlige Unabhängigkeit der Exponenten an, eine Annahme, die sich natürlich aus keiner der beiden in Frage stehenden Theorien beweisen läßt. In demselben Sinne wie Prandtl (44, 45) kann er natürlich auch eine Formel zwischen Reibungswiderstand uud Wärmeabgabe ableiten.

§ 3. Abkühlung im turbulenten Flüssigkeitsstrom.

Eine viel größere praktische Bedeutung wie die Abkühlung im laminaren Flüssigkeitsstrom besitzt diejenige im turbulenten. Sie ist in den meisten Fällen durch die äußeren Bedingungen zwanglos gegeben und wegen ihres größeren Kühlvermögens erwünscht. Zu Beginn der theoretischen Entwicklung versuchte man diese stärkere Kühlfähigkeit durch einen größeren Wärmeleitungskoeffizienten zu erklären; doch sei hier darauf nicht näher eingegangen. Die Betrachtungen Nusselts (34) haben natürlich wie für laminare Strömung so auch hier Geltung. Die ersten Ansätze rühren hier von Reynolds her, der im Anschluß an die Verhältnisse der laminaren Strömung die Wärmeabgabe mit ihrem Reibungswiderstand in Verbindung setzte, und durch Versuche ihre funktionelle Zusammengehörigkeit prüfte. Prandtl hat, wie bekannt, diese integralen Zusammenhänge spezialisiert zu seiner Grenzschichttheorie. Indem er im Anschluß an eine Arbeit von Nusselt (34) die abgegebene Wärme mit dem Druckgradienten in Verbindung setzt $Q = K\Theta l\frac{dp}{dx}$, der aus Dimensionsbetrachtungen als $f\left(\frac{\varrho v l}{K}\right)$ gefunden wird, gelangt er bei Übertragung auf tropfbare Flüssigkeiten zur Annahme einer laminaren Grenzschicht, die den turbulenten Strom gegen die Rohrwand begrenzt. Für diesen Fall ergibt sich für den aus Dimensionalbetrachtungen gefundenen Ausdruck der abgegebenen Wärme pro Flächen- und Zeiteinheit $h = \frac{K}{2r}\,\Phi(\xi, \nu)$ eine Abschätzung der unbestimmten Funktion Φ dadurch, daß bei der turbulenten Strömung in der Nähe der Wand die Konvektion gegen die Zähigkeitswirkungen zurücktritt. $\Phi(\xi, \nu)$ ist dann

$$= \frac{\varphi(\xi)}{\mu - (\mu - 1)\left(\frac{v'}{\bar{v}}\right)},$$

wo $\frac{v'}{\bar{v}} = \frac{1}{\mu}\varphi(\xi)$, für $\psi(\xi) = 0$ stark turbulent, $\frac{v'}{\bar{v}} = \varphi(\xi)$, für $\psi(\xi) = 1$ laminar.

Dabei ist ξ die Reynoldssche Zahl,

$$\mu = \frac{K}{C\nu}, \quad \frac{v'}{\bar{v}} = \psi(\xi),$$

v' die Geschwindigkeit in der Entfernung s an der Wand, $\bar{v}$ die mittlere Geschwindigkeit der Strömung.

Eine Erweiterung erfahren die Betrachtungen Prandtls dnrch eine Bemerkung von Kármán (27), daß der Anteil der eigentlichen Reibung bei größeren Reynoldsschen Zahlen bis auf eine sehr dünne Schicht an der Wand verschwindend klein ist, so daß die Schubspannung fast ausschließlich als Mittelwert der Impulskonvektion aufzufassen ist. Unter der weiteren Annahme, daß die Impulsübertragung und die Wärmeübertragung durch denselben, ungeordneten molaren Prozeß bewirkt wird, kann

er aus dem Ansatz für die Reibung, wenn mit ε die Schichtdicke bezeichnet wird,

$$\tau = \varphi(\varepsilon, \eta, u)\frac{d(\eta\varrho)}{dy} = 0{,}805\left(\frac{\tau_0}{\varrho}\right)^{3/7} \nu^{1/7} Y^{6/7} d\frac{(u\varrho)}{dy};$$

$$\left(Y = \frac{r^2 - y^2}{2r}\right)$$

auf einen entsprechenden Ansatz für die Wärme schließen:

$$q = 0{,}805\,\varrho\left(\frac{\tau_0}{\varrho}\right)^{3/7} \nu^{1/7} Y^{6/7} \frac{d(cqT)}{dy}.$$

Dieser Ansatz läßt sich auch bis an die Wand selbst fortsetzen, falls man dort für die molekulare Wärmeübertragung dieselbe Proportionalität annehmen will, was für Körper gilt, die die Gleichung $\frac{Cv}{K} = 1$ befolgen.

Auf Grund dieses Ansatzes führt H. Latzko (29) nun für einige Fälle unter Vernachlässigung von temperaturbedingten Druck- und Dichtedifferenzen die Berechnung der abfließenden Wärmemenge durch. Wir folgen im wesentlichen seiner Arbeit, die bisher fast ohne Ergänzung geblieben ist. Er überträgt zunächst den Gedanken der kinetischen Gastheorie, der zum Gesetz der Wärmeleitung führte, auf den Fall der turbulenten Unordnung und erhält so für

$$q = \beta C\bar{v}\frac{\partial T}{\partial y}\cdot\lambda,$$

wo $\beta\bar{v}\lambda$ der „Turbulenzkoeffizient" ist. λ ist eine Art mittlerer Weglänge. Dieser Turbulenzkoeffizient in Verbindung mit C stellt eine ähnliche Konstante dar, wie die Leitfähigkeit K bei der ruhenden Flüssigkeit. In Verbindung mit dem Kármánschen Ansatz ergibt sich schließlich

$$q = \frac{7}{B}\left(\frac{\tau_0}{\varrho}\right)^{3/7} \nu^{1/7} CY^{6/7}\frac{dT}{dy}.$$

Dieser Ansatz, der für Geschwindigkeiten, die etwa der 5fachen Geschwindigkeit wie die kritische Zahl entsprechen, bringt hier die Annahme der gleichen Proportionalität zwischen q und τ wie zwischen K und η. Der hierdurch begangene Fehler wird für Gase, wie die Experimente zeigen, vernachlässigenswert; eine Erweiterung auf tropfbare Flüssigkeiten liegt bisher nicht vor.

Mit Hilfe dieses Elementargesetzes ist es Latzko nun möglich, den Wärmeaustausch im Rohr zu berechnen. Es gibt dabei 4 wohl zu unterscheidende Fälle:

1. Hydrodynamisch und thermisch ausgebildeter Zustand mit festem Geschwindigkeitsprofil;

2. Hydrodynamisch ausgebildeter, thermisch nicht ausgebildeter Zustand.

3. Hydrodynamisch unausgebildeter, thermisch ausgebildeter.

4. Hydrodynamisch und thermisch nicht ausgebildeter Zustand.

Für den ersten Fall erhält er aus der Wärmebilanz

$$\frac{\partial}{\partial y}(2\pi y q) = Cu\frac{\partial T}{\partial z}2\pi y$$

unter Benutzung des obigen Gesetzes eine Differentialgleichung, die den Randbedingungen genügen muß:

$$T = 0 \text{ für } y = r,$$

$$\frac{dT}{dy} = 0 \quad , \quad y = 0,$$

für $z = 0$ ist die Temperaturverteilung gegeben.

Die Integration ergibt die recht komplizierte Gleichung des Temperaturfeldes im Rohr:

$$T = T_0\left\{\begin{array}{l} 1{,}129\,e^{-0{,}151\left(\frac{\nu}{vd}\right)^{1/4}\cdot\frac{z}{d}}\,[0{,}9544\,x - 0{,}0212\,x^3 + 0{,}0668\,x^5] \\ -0{,}180\,e^{-2{,}814\cdot\left(\frac{\nu}{vd}\right)^{1/4}\cdot\frac{z}{d}}\,[-0{,}7472\,x - 4{,}275\,x^3 + 6{,}022\,x]^5 \\ +0{,}049\,e^{-29{,}12\cdot\left(\frac{\nu}{vd}\right)^{1/4}\cdot\frac{z}{d}}\,[20{,}34\,x - 54{,}80\,x^3 + 35{,}47\,x^5]. \end{array}\right\}$$

Eine Darstellung über einen Rohrquerschnitt hin ist durch seine Fig. 2 gegeben, in der die aufeinanderfolgenden Zustände d, c, a, b angegeben sind, wenn man zu Anfang rechteckige Temperaturverteilung d angenommen hat.

Latzko berechnet dann mit dem obigem Elementargesetz aus der Formel $h = \frac{q_0}{T_m}$ die Wärmeübergangszahlen, wo T_m die mittlere Flüssigkeitstemperatur ist, und findet sie zu

$$h = 0{,}0346\,vC\left(\frac{\nu}{vd}\right)^{1/4}\frac{1{,}078\,e^{-k_1 z} + 0{,}134\,e^{-k_2 z} + 0{,}980\,e^{-k_3 z}}{0{,}970\,e^{-k_1 z} + 0{,}024\,e^{-k_2 z} + 0{,}006\,e^{-k_3 z}}.$$

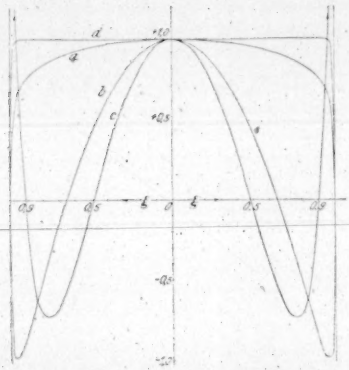


Fig. 2. Aus Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik. VDI-Verlag G. m. b. H., Berlin.

Hierbei ist gesetzt

$$k_1 = 0{,}1510\,\frac{1}{d}\left(\frac{\nu}{vd}\right)^{1/4},$$

$$k_2 = 2{,}844\,\frac{1}{d}\left(\frac{\nu}{vd}\right)^{1/2},$$

$$k_3 = 29{,}42\,\frac{1}{d}\left(\frac{\nu}{vd}\right)^{3/4},$$

(das analoge Resultat für Laminarströmung hat Nusselt berechnet). Durch den Hinweis von Gröber(20) und die Berechnung von Schack(54) hat es sich aber inzwischen gezeigt, daß statt der wahren Mitteltemperatur

$$T_m = \frac{2\pi\int_0^R T r\,dr}{\pi R}$$

eine andere Mitteltemperatur T_g einzusetzen ist, die durch die Gleichung

$$T_g = \frac{\int_0^R T u r\,dr}{\int_0^R u r\,dr}$$

bestimmt ist. Die Differenz zwischen beiden so definierten Mitteltemperaturen ist gegeben durch

$$T_g - T_q = \frac{1}{72}(T_A - T_R);$$

(T_A Rohrrandtemperatur, T_R Rohrachsentemp.) und ihr Verhältnis

$$\frac{T_g}{T_m} = \frac{8}{9}\cdot\frac{8+\frac{T_R}{T_A}}{7+\frac{T_R}{T_A}},$$

mit dem dann die Formel Latzkos multipiziert werden muß. Eine experimentelle Prüfung der Kármán-Prandtlschen Theorie ist dann nach Schack gegeben durch die Tatsache, daß in einer Entfernung von $0{,}75\,R$ von der Achse aus eine Temperatur herrschen muß, die sich zusammensetzt aus

$$T_g = \frac{8}{9}T_A + \frac{1}{9}T_R.$$

Analoges gilt für den hydrodynamisch unausgebildeten Zustand. Die Abhängigkeit der Wärmeübergangszahl α von der Rohrstelle nimmt rascher ab wie für laminaren Strom und nähert sich einem Minimalwert, der aber nicht wie bei jener von der Geschwindigkeit unabhängig ist, sondern durch die Gleichung

$$h_{\min} = 0{,}0384\,\bar{v}C\left(\frac{r}{\bar{v}d}\right)^{1/4}$$

bestimmt ist, die mit den von Reynolds(49) entwickelten Formeln analog ist. Es treten hier bemerkenswerterweise nur die Größen auf, die für die molare Wärmeübertragung wichtig sind, während die für die molekulare ganz zurücktreten. Das allgemeine Temperaturfeld läßt sich für diesen Fall durch die Formel wiedergeben

$$T = T_0\left(\frac{y}{r}\right)^{1/7}\left\{1{,}112 - 0{,}0819\,\frac{y}{r} - 0{,}0305\left(\frac{y}{r}\right)^2\right\},$$

woraus

$$h_n = K\nu\left(\frac{r}{\bar{v}d}\right)^{1/4},$$

folgt, wenn man mit K eine reine, aber kompliziert gebaute Funktion von $\left(\frac{\delta}{r}\right)$ bezeichnet. Die von Latzko gezeichnete Fig. 3 zeigt, daß der Abfall bei nicht ausgebildeter Strömung (der laminaren verwandter) viel weniger rasch erfolgt, wie bei hydrodynamisch ausgebildeter. Das analoge Resultat für die Platte ist

$$h = 0{,}0356\,CU\cdot T_0 l\cdot\left(\frac{r}{Ul}\right)^{1/5},$$

wenn man unter U die Geschwindigkeit der ungestörten Strömung versteht. Auch hier müßte h mit dem Verhältnis $\frac{T_m}{T_g}$, das aber nicht den obigen Wert hat, multipliziert werden, um das richtige Resultat zu erhalten. Diese ganzen Betrachtungen sind aber, wie oben erwähnt, nur erst für Gase angestellt und lassen sich nicht ohne weiteres auf die tropfbaren Flüssigkeiten übertragen, denn dort kann man nicht mehr die Kohäsion vernachlässigen und an der Analogie von Wärme und Impulsleitung festhalten $\left(\frac{K\varrho}{c\eta} \neq 1\right)$. Die Übertragung kann dann nur

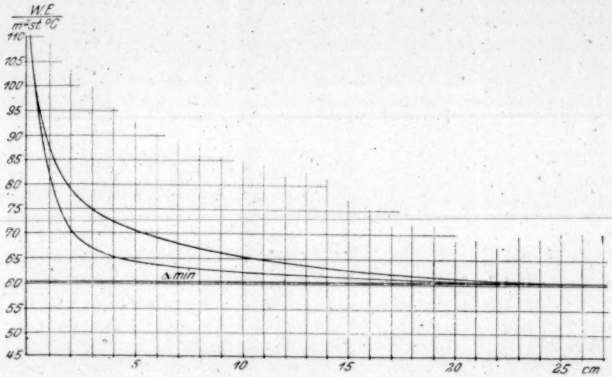


Fig. 3. Aus Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik. VDI-Verlag G. m. b. H. Berlin.

dort stattfinden, wo die molaren Vorgänge überwiegen, d. h. überall bis auf eine dünne Oberflächenschicht, die wesentlich dünner ist wie die Grenzschicht. Auch diese Übertragung hat Latzko angekündigt.

§ 4. Vergleich mit der Erfahrung.

Zur Prüfung der hier angeführten Theorien ist das bisher vorliegende Material in den meisten Fällen in recht weitgehender Weise geeignet, besonders da die Versuchsergebnisse meistens ein größeres Gebiet umfassen, als von den einzelnen Theorien beherrscht wird. Die Prüfung wird hauptsächlich geschehen müssen hinsichtlich der Größe und Temperatur des heißen Körpers und der Geschwindigkeit und Natur des abkühlenden Mediums. Die Körpergrößen ändern sich hierbei im Verhältnis $1:10^4$, die Temperatur reicht bis zu 1200° C und die Zähigkeit der Flüssigkeit bis zu der des Glyzerins, wenngleich die Hauptmessungen an Luft vorgenommen sind. Über die dadurch bedingte Variabilität der für die Flüssigkeit charakteristischen Größe $\frac{cv}{K}$ unterrichtet Tabelle I, § 6 des obenerwähnten Berichtes von R. Seeliger (55).

Über ältere Versuche berichtet eingehend Compan (14), der auch selber Versuche an einer Kugel angestellt hat, die sich in ihrer Abhängigkeit von der Geschwindigkeit angenähert durch $\sqrt{v}$ darstellen läßt.

Aus praktischen Gründen wurden jedoch meistenteils drahtförmige Körper untersucht, die elektrisch geheizt wurden und deren Widerstand ein Maß für ihre Temperatur war. Die Diskusion der hierauf bezüglichen Arbeiten hat Davis (15) bereits vollkommen durchgeführt, so daß hier nur eine kurze Wiedergabe genügt. Für Gase reduziert sich ja die allgemeine Formel $\frac{vdc}{K}$ zunächst auf die von King (26) gegebene Darstellung seiner Beobachtungen

$$h = B\sqrt{vd} + C,$$

wo B und C zwar praktisch konstant, aber doch in geringem Grade von der Übertemperatur und C außerdem noch vom Drahtdurchmesser abhängig sind. Wie die Figur zeigt, ergibt sich eine sehr gute Übereinstimmung von Beobachtung und Theorie (die geringen Abweichungen der Messungen Carpenters (12) sind schon von Davis diskutiert) und der Wärmeverlust scheint hier praktisch von Übertemperatur und Drahtdicke unabhängig zu sein, wenngleich die Verhältnisse bei den viskosen Flüssigkeiten auf geringe derartige Abweichungen schließen lassen. Folgende Tabelle von Davis (15) gibt die Variation der verschiedenen Variabeln bei verschiedenen Beobachtern.

Name	d (cm)	v (cm/sec)	Θ (°C)
Hughes (22)	0,4—2	2—15 · 10^2	100°
„	5,06		
Carpenter (12)	5.1		85
King (26)	0,003 bis	17,8 · 10^2	200—1200
„	0.015		
Kennelly (28)	0,0204	8—10 · 10^2	51°, 128°
Compan (14)		3—6 · 10^2	17—200°

Hier sind auch die Versuche von Thomas (60) zu erwähnen, soweit sie sich aus den in technischer Hinsicht angestellten verwerten lassen. Es findet bei einem Drahtdurchmesser von $7{,}84 \cdot 10^{-3}$ cm und einer Windgeschwindigkeit

bis zu 26,1 cm/sec eine angenäherte Proportionalität mit $\sqrt{v}$ bei höheren Temperaturen (Strom = 1,4 — 1,5 Amp.) statt, während bei niedrigen sich eine geringere Potenz ergibt. Zu bemerken ist jedoch, daß das gemessene v nur ein Mittelwert des tatsächlich vorhandenen ist, abgesehen davon, daß teilweise die Geschwindigkeit der freien Konvektionsströmung, die experimentell bestimmt wurde, mit der der Stromgeschwindigkeit vergleichbar wird. Erstere wächst

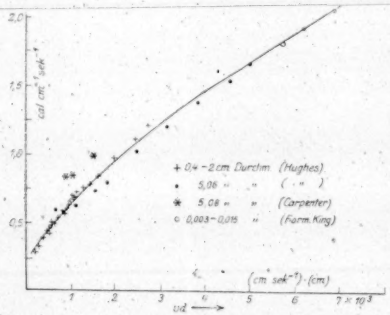


Fig. 4.

in befriedigender Übereinstimmung mit Kings Rechnung (26) für ideale Gase von 3,1 auf 15,9 cm/sec, wenn die Drahttemperatur von 135 auf 677° C wächst. Aus diesen Gründen, und zugleich deshalb, weil der Apparat wegen technischer Forderungen nicht klare Versuchsbedingungen erlaubt, können auch die von Thomas angestellten Versuche über Abkühlung in anderen Gasen als Luft nur qualitativ herangezogen werden. Es wurden solche angestellt in trockener und feuchter Luft, O_2, CO_2, Kohlengas und H_2, wobei die Abkühlungsgröße in der angeführten Reihenfolge von Luft zu Wasserstoff hin wächst. Der Unterschied ist aber nicht sehr bedeutend und liegt zwischen den beiden Luftarten bei 2 Proz., zwischen trockener Luft und Sauerstoff bei ca. 6 Proz.

Die Versuche von Worthington und Malone (61) an Wasser, die sich in obige Figur gut einordnen lassen, erführen durch Davis in einer nächsten Arbeit (18) einen Ausbau auf andere viskose Flüssigkeiten. Wasser, Paraffin und drei Sorten Transformatorenöl wurden untersucht, wobei bei letzteren die Darstellung durch die Funktion $\left(\frac{vdc}{K}\right)^{1/2}$ versagt. Eine empirische Formel

$$\frac{H}{K} = N\left(\frac{vdc}{250K}\right)^{n},$$

wo n variiert wie $\left(\frac{K}{cv}\right)^{0,03-0,01}$, stellt dagegen die Beobachtungen befriedigend dar. Durch Kombination dieser Resultate mit den in Gasen erhaltenen findet Davis schließlich die allgemeine Formel

$$\frac{H}{K} = A \cdot B \cdot C \cdot \left|\left(\frac{vdc}{K}\right) \cdot \left(\frac{K}{cv}\right)^{m}\right|^{n},$$

wo n von 0,38 bis 0,48 variiert und A, B, C Konstante sind. Für eine feinere Betrachtung hängt aber A doch noch von der Übertemperatur und den damit variierenden Stoffkonstanten der Flüssigkeit ab. C variiert wie $\left(\frac{K}{cv}\right)^{-m}$, wo $m = 0$ für Gase bis gegen 0,19 für Öle wächst, und hängt also nur von der Natur der Flüssigkeit ab. B schließlich hängt, abgesehen von der Flüssigkeitsnatur nur vom Drahtdurchmesser ab. Davis stellt hier die interessante Hypothese auf, daß wir es hier in diesem Faktor mit einem Gliede zu tun haben, das aus der Konvektionsströmung der freien Abkühlung entstanden ist, bei der die Variable $\frac{cg d^3 a \Theta}{Kv}$ ja zur Darstellung verwandt wurde (s. Bericht I, S. 286), und es würde dann $\frac{ca}{Kv}$ die Veränderung mit der Flüssigkeit genügend erklären. Zu widersprechen scheinen dieser Anschauung nur die Versuche von Hughes, bei dem der Gang der B-Werte mit dem Durchmesser gerade umgekehrt verläuft. Eine Reihe dieser B-Werte finden sich in der angeführten Arbeit von Davis. Die Kurve zeigt die Reduktion der verschiedenen Flüssigkeitskurven durch die Formel zusammen mit einer mittleren Gaskurve $\left(\text{Luft } \frac{K}{cv} = 1{,}35\right)$ in eine einzige Linie.

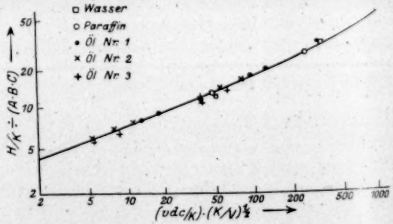


Fig. 5.

Wenn man diese experimentellen Ergebnisse mit denen der Theorie vergleichen will, so muß man in Erwägung ziehen, daß, da die Versuche in einem Kanal mit ruhender Flüssigkeit und

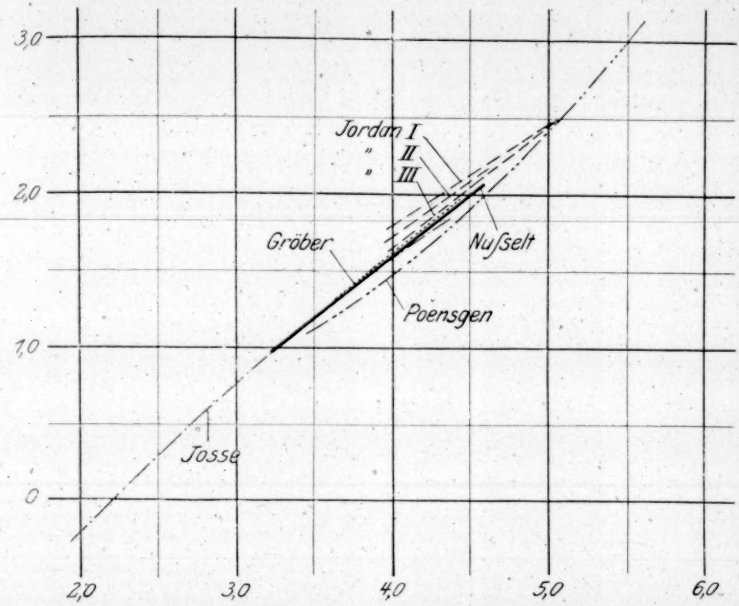


Fig. 6. Aus Gröber, Grundgesetze der Wärmeleitung. J. Springer. Berlin.

bewegtem Draht gemacht wurden, vielleicht durch den am Rückende entstehenden Wirbel sowie durch die Konvektionsströme der freien Abkühlung, die Voraussetzungen der Theorie nicht so ganz erfüllt und die Zusatzfaktoren A, B, C nötig sind. Wahrscheinlich gemacht wird dies auch noch durch die Photographien von Pramanik (46) und Roy (47) die bei stark viskosen Flüssigkeiten einen verhältnismäßig großen beeinflußten Flüssigkeitsbereich zeigen. Es sind aber in Theorie wie im Experiment dieselben Variabeln vorhanden und der Exponent des Potenzgesetzes, der im Experiment ist, nähert sich der Potenz 0,5 der Theorie, denn für das weniger viskose Wasser gilt der Wert 0,48, für Luft sogar 0,5 während für Öl 0,38 gilt. Ebenso scheint er für größere Körper, d. h. kleinere Krümmungen, zu wachsen.

Sehr viel schlechter steht es mit der Prüfung der Theorien, die die Wärmeabgabe im turbulenten Flüssigkeitsstrom darstellen. Zwar liegen hier die meisten Versuche bei durchströmten Rohren wegen des industriellen Interesses vor, aber sie lassen sich fast nur für jeden einzelnen Fall auswerten. Der Grund hierfür ist darin zu suchen, daß die Versuche ohne Beachtung der von Latzko hervorgehobenen vier Untersuchungsfälle angestellt sind, und daß sich nachträglich die Resultate schlecht in diese einordnen lassen. Für die Beurteilung des Falles 1, hydrodynamisch und thermisch ausgebildeter Zustand, lassen sich nur einige Versuche von Nusselt mit vorgeschalteter, 2 m langer Anlaufstrecke anführen. Sie ergeben nach Latzko einen Schwankungsbereich der Fehler gegen die Theorie von — 0,5 Proz. bis + 4,14 Proz., erscheinen also als sehr gute Übereinstimmung. Weniger gut sind die Versuche von Nusselt (34) und Jordan (23) in Luft, die für den Fall 4 in Betracht kommen. Sie geben einen Fehler von 6—20 Proz. Eine noch schlechtere Bestätigung bilden die Versuche der übrigen Verfasser, die durch die obenerwähnte Außerachtlassung Fehler bis 40 Proz. erhalten. Sönneken (57) findet gar an Wasser beim Vergleich zwischen glatten und rauhen Metallrohren entgegen dem theoretischen Ergebnis eine Verkleinerung des Wärmeübergangs für rauhe Rohre, die analytische Fassung stimmt aber qualitativ mit der der Nusseltschen Theorie überein. Die Diskrepanz der Sönnekenschen Versuche mit der Theorie von Nusselt wie

mit der von Latzko vermeidet Jürges und Nusselt (38) und Jürges (25), denn es zeigt sich bei seinen Versuchen eine größere Wärmeabgabe bei rauhen Oberflächen wie bei glatten. Er wendet auf die Korrektion von Fehlern die allergrößte Mühe. Trotzdem erhält er einen Unterschied gegen die Latzkosche Theorie von 40 Proz. in bezug auf die Geschwindigkeit, ein Ergebnis, daß vielleicht durch die hydrodynamische Anordnung gegeben ist. Weniger stark ist der Fehler gegenüber den Nusseltschen Messungen.

Ein näheres Eingehen auf die Messungen der einzelnen Autoren scheint unter diesen Umständen nicht am Platze. Teilweise sind ihre Messungen in der Fig. 6, die aus dem Buche von Gröber entnommen ist, dargestellt. Sie könnte noch erweitert werden z. B. durch die Messungen von Stanton (58), Clement und Gerlach (13) und Pannell (40), siehe dazu auch Rice (50). Doch bieten sie prinzipiell nichts Neues. Klar erwiesen ist bisher hier nur die Kombination der Variablen zu 2, bzw. 3 Größen durch Nusselt (34), dessen Darstellungsweise immer angewandt werden kann.

Zusammenfassend ergibt sich wohl: Während für Gase die von Boussinesq-King herrührenden Ansätze für ideale Flüssigkeiten gelten, müssen sie für die tropfbaren Flüssigkeiten durch Hinzunahme der inneren Reibung erweitert werden [Davis (17)]. Zur Vervollständigung der Theorie fehlt nur noch die Abhängigkeit der Materialkonstanten von der Temperatur der Flüssigkeit. In beiden Fällen haben aber die Versuche eine sehr gute Übereinstimmung mit der Theorie ergeben. Hinsichtlich der turbulenten Flüssigkeitsströmung erscheint am bemerkenswertesten nach den Ähnlichkeitsformeln von Nusselt die Theorie von Latzko, die auf der Prandtl-Kármánschen Grenzschichttheorie aufgebaut worden ist, wenngleich ihre Übertragung auf tropfbare Flüssigkeiten noch aussteht. Ihre Bestätigung ist bisher noch nicht in dem Maße durch Versuche erbracht, wie für laminare Strömung. Die Theorie von Nusselt erscheint dagegen auch hier in wenigstens leidlicher Übereinstimmung mit den Versuchen zu stehen.

Literaturverzeichnis.

1) Mc Adams and Frost, Ind. and Eng. chem. **14**, 1101, 1922.
2) K. Aichi, Phys. Math. Proc. of Japan **2**, 1920.
3) Ayrton and Kilgour, Phil. Trans. **183**, Part. 1, 371, 1892.
4) Boussinesq, C. R. **132**, 1382, 1901.
5) —, C. R. **133**, 257, 1901.
6) —, C. R. **138**, 1134, 1189, 1904.
7) Boussinesq, C. R. **140**, 15, 65, 1905.
8) —, Journ. de Math. I, 285, 1905.
9) —, Théorie de la chaleur II.
10) Blasias, Zeitschr. f. Math. u. Phys. **56**, 1, 1908.
11) Callendar, Proc. Phys. Soc. Lond. **33**, 137, 1901.
12) Carpenter, Heating and Ventilation of Buildings, Wiley a. Sons, 1903.
13) Clement and Gerlach, Univ. of Illinois Bull. **40**, 1909.
14) Compan, Ann. de Chem. et de Phys. **26**, 488, 1902.
15) Davis, Phil. Mag. **40**, 698, 1920.
16) —, Phil. Mag. **41**, 899, 1921.
17) —, Phil. Mag. **44**, 940, 1923.
18) —, Phil. Mag. **47**, 1057, 1924.
19) —, Phil. Mag. **49**, 285, 1925.
20) Gröber, Ges. Ing. **43**, 301, 1920.
21) —, Wärmeleitung u. Wärmeübergang, Berlin 1921.
22) Hughes, Phil. Mag. **31**, 118, 1916.
23) Jordan, Proc. Inst. of Mech. Eng. 1909, Part. 3—4.
24) Josse, Hütte I. (22. Aufl.), S. 385.
25) Jürges, Ges. Ing. 1924, Beiheft 19.
26) King, Phil. Trans. (A) **214**, 373, 1914.
27) v. Kármán, Zeitschr. f. ang. Math. u. Mech. I, 233, 1921.
28) Kennelly, Trans. A. I. E. E. **28**, 363, 1909.
29) Latzko, Zeitschr. f. ang. Math. u. Mech. I, 268, 1921.
30) Langmuir, Phys. Rev. **34**, 401, 1912.
31) —, Proc. (A) I. E. E. 1011, 1912.
32) Leprince-Riguet, C. R. **152**, 436, 1911.
33) Morris, Electrician 1912. S. 1056.
34) Nusselt, Zeitschr. d. Ver. d. Ing. **53**, 1750, 1909.
35) —, Zeitschr. d. Ver. d. Ing. **54**, 1154, 1910.
36) —, Ges. Ing. 1915, Nr. 42, 43.
37) —, Zeitschr. d. Ver. d. Ing. **60**, 541, 1916.
38) Nusselt u. Jürges, Ges. Ing. **45**, 641, 1922.
39) Ott, Forschungsheft d. Ver. d. Ing. Nr. 35/36.
40) Pannell, Techn. Rep. of Adv. Com. f. Aeronautic. 1916—17, S. 22.
41) Poensgen, Zeitschr. d. Ver. d. Ing. **60**, 27, 1916.
42) Petavel, Phil. Trans. 191, 1898.
43) Pohlhausen, Zeitschr. f. ang. Math. u. Mech. I, 115, 1921.
44) Prandtl, Physik. Zeitschr. **11**, 1072, 1910.
45) —, Verh. d. 3. intern. Math. Kongr. zu Heidelberg. Leipzig 1904, S. 484.
46) Pramanik, Proc. Indian Ass. f. Cult of Sc. 7.
47) Roy, Proc. Indian Ass. f. Cult of Sc. 7.
48) Rayleigh, Nature **95**, 66, 1915.
49) Reynolds, Proc. Manchester Lit. and Phil. Soc. 1874.
50) Rice, Phys. Rev. **21**, 474, 1923; Ind. and Eng. Chemistry **16**, 460, 1924.
51) Royds, Heat Transmission Vol. 1—3, London 1921.
52) Schack, Zeitschr. d. Ver. d. Ing. **67**, 807, 1923.
53) —, Forschungsber. (d. Ver. d. Ing.), Heft 89.
54) —, Zeitschr. f. ang. Math. u. Mech. **4**, 249, 1924.
55) Seeliger, Physik. Zeitschr. **26**, 282, 1925.
56) Ser, Traité de Physique industrielle I, p. 142, 1888.
57) Soenneken, Diss. T. H., München 1910.
58) Stanton, Trans. Roy. Soc. Lond. **190** (A), 67, 1897.
59) Taylor, Rep. Adv. Comm. Aeronautics. 19. 423, 1916—17.
60) Thomas, Phil. Mag. **39**, 505, 1920.
61) Worthington u. Malone, Frankl. Inst. I. 185, 15, 1917.

Anmerkung bei der Korrektur: Herr Nusselt hat Herrn Seeliger — leider erst nach Abschluß der zweiten Korrektur — auf eine von ihm in der Festschrift d. Techn. Hochsch. Karlsruhe 1925 veröffentlichte Arbeit über „Wärmeübertragung von Wasser ins Rohr" aufmerksam gemacht, die hier wenigstens noch erwähnt sei.

(Eingegangen 15. März 1926.)

BESPRECHUNGEN.

W. Böttger, Qualitative Analyse und ihre wissenschaftliche Begründung. Gr. 8°. XVI und 644 S., mit 32 Figuren, 1 Spektraltafel u. besonderen Tabellen zum Gebrauch im Laboratorium. 4.—7., umgearbeitete und erweiterte Auflage. Leipzig, Verlag von Wilh. Engelmann. 1925. M. 19.—, gebunden M. 22.—.

Die Tatsache, daß die Neuauflage von Böttgers qualitativer Analyse gleich als 4.—7. Aufl. erscheint, zeigt, wie groß das Interesse und der Bedarf an diesem wertvollen Werk ist. Es liegt hier ein Lehrbuch vor, das dem erstrebenswerten Ziel des Chemieunterrichts an der Hochschule dient, neben der praktischen Übung in der analytischen Methodik insbesondere auch zu selbständigem wissenschaftlichen Denken anzuregen. Die neue Auflage ist von diesem Gesichtspunkt aus noch wertvoller, denn der Verfasser hat jetzt auch die Wernersche Koordinationslehre und ihre tiefere Begründung durch die Atomforschung, insbesondere in den Kosselschen Anschauungen, aufgenommen. Gerade die genaue Kenntnis der Chemie der Verbindungen höherer Ordnung ist heute für die Beherrschung der chemischen Tatsachen mindestens von ebenso großer Bedeutung, wie das Vertrautwerden mit der Ionentheorie, die der Verfasser — unter besonderer Berücksichtigung der Wernerschen Vorstellungen — in dem ihr gebührenden Umfang zurechtkommen läßt, ohne die so häufige Überspannung in der Anwendung der Ionenformeln mitzumachen.

Zumal für den Physiker dürften die Anwendungsmöglichkeiten der neueren Atomphysik auf rein chemische Fragen, wie sie in den einschlägigen Abschnitten des Buches Berücksichtigung finden, von besonderem Interesse sein. Dabei konnten hier die so zahlreichen Meinungsverschiedenheiten über diese Probleme ruhig beiseite gelassen werden, da sie sich häufig viel mehr auf quantitative Folgerungen theoretisch-physikalischer Art beziehen. Gerade durch die Anwendung auf bestimmte chemische Fragen können diese Probleme zur weiteren Ausgestaltung gebracht werden und sich andererseits auch fruchtbar erweisen. — Zweckmäßiger wäre es vielleicht vom didaktischen Standpunkt aus, wenn an Stelle der vom Verfasser gemachten Unterscheidung zwischen Doppelsalzen und Komplexsalzen nur von verschiedenen Graden der Komplexbeständigkeit gesprochen würde, da hierdurch die Zusammenfassung aller Verbindungen höherer Ordnung unter einem einzigen Gesichtspunkt besser zum Ausdruck kommt.

Im speziellen Teil des Buches wird man besonders die Aufnahme zahlreicher Spezialreaktionen begrüßen, bei deren kritischer Auswahl die große Erfahrung des Verfassers sich deutlich verrät. Gleichwohl wird der Chemiker hierbei, gerade in Anbetracht der oft eingehenden Berücksichtigung auch fernerliegender Tatsachen, manches andere auch vermissen. Sehr zu begrüßen ist die häufige Erwähnung der mikrochemischen Reaktionen. Die klare Anordnung des umfangreichen Stoffes bietet leicht die Möglichkeit, sich über einzelne Reaktionen rasch zu orientieren.

Durch seine ganze Anlage setzt sich das Werk in deutlichen Gegensatz zu den zahlreichen kurzen Anleitungen der analytischen Chemie, die letzten Endes lediglich eine Überspannung in der historisch zwar gegebenen, sachlich aber nicht begründeten alleinigen Anwendung der analytischen Chemie im Unterricht mit sich bringen, ohne dazu dem Studierenden zu tieferem Verständnis der chemischen Tatsachen und zu wirklicher Fertigkeit im Analysieren zu verhelfen.

Das Werk kann jedem, der sich überhaupt mit chemischen Fragen theoretisch und praktisch zu beschäftigen hat, aufs wärmste empfohlen werden.

Hieber.

Ostwald-Luther, Hilfsbuch zur Ausführung physikochemischer Messungen. Vierte, neubearbeitete Auflage, herausgegeben von C. Drucker. Gr. 8°. XX und 814 S. Mit 564 Figuren und 3 Tafeln. Leipzig 1925. Akademische Verlagsgesellschaft m. b. H. Geb. M. 35.—, br. M. 32.—.

Der große Aufschwung, den das Grenzgebiet zwischen Physik und Chemie im Laufe der letzten 15 Jahre genommen hat, ließ eine völlige Neubearbeitung des klassischen Handbuches von Ostwald-Luther schon lange als Notwendigkeit erscheinen. Die letzte Auflage datiert aus dem Jahre 1909. Um der fortdauernden Nachfrage einigermaßen zu genügen, wurden davon mehrfach unveränderte Neudrucke hergestellt. Die nunmehr vorliegende 4. Auflage stellt dagegen die längst erwartete Neubearbeitung dar. Den neuen Gebieten wurde in ihr durch entsprechende neue Abschnitte Rechnung getragen. Dem Herausgeber C. Drucker gelang es, dafür eine Reihe ausgezeichneter Mitarbeiter zu gewinnen. So verfaßten das Kapitel „Radioaktivität" W. Bothe und F. Paneth; das Kapitel über die Röntgenanalyse fester Körper schrieb R. Groß; die Abschnitte über die Verwendung von Elektronenröhren für physikochemische Messungen und über die Bestimmung der Dielektrizitätskonstante verfaßte W. Gerlach; F. Weigert besorgte die völlige Neubearbeitung des Kapitels „Optik"; das Kapitel „Chemische Dynamik" stammt von H. v. Halban; den einleitenden Abschnitt „Rechnen" unterzog R. Luther einer gründlichen Revision; der Herausgeber C. Drucker übernahm die Modernisierung der übrigen Abschnitte: Längenmessung, Wägung, Temperaturmessung, Thermostaten, Technisches, Druckmessung, Volumen, Dichte, Wärmeausdehnung, Kompressibilität, Siedepunkt, Dampfdruck, Schmelzpunkt, kritische Größen, innere Reibung, Oberflächenspannung, Diffusion, Löslichkeit, Molekulargewichtsbestimmungen, Kalorimetrie, Messung elektromotorischer Kräfte, der elektrischen Leitfähigkeit von Elektrolyten, der Elektrizitätsmenge und der Überführungszahl.

Die kurze Inhaltsangabe läßt erkennen, ein welch wertvolles Nachschlagewerk der neue Ostwald-Luther auch für den Physiker darstellt. Besonders erwünscht dürfte das Kapitel „Optik" sein, das viele ausgezeichnete Ratschläge und zahlreiche Literaturverweise, z. B. für die Erzeugung von Licht verschiedenster Wellenlängen, über praktische Lichtfilter (Flüssigkeits-, Kollodium-, Gelatine-) über Plattensensibilisierung, über Refraktions- und Absorptionsmessungen, über subjektive und objektive Photometrie, über Spektroskopie, Mikroskopie und Ultramikroskopie, über optische Pyrometrie und die Messung der Lichtenergie enthält. Der Abschnitt „Elektronenröhren" zeigt eine Reihe erprobter Schaltungen für die verschiedenartigsten Meßzwecke; auch das Kapitel über den Bau von Thermostaten und Thermoregulatoren für hohe, gewöhnliche und tiefe Temperaturen, wobei auch eine Anleitung zum Bau elektrischer Öfen verschiedener Konstruktion gegeben wird, dürfte

im physikalischen Laboratorium nicht selten gute Dienste leisten.

Der Text ist durchwegs sehr klar geschrieben; eine große Anzahl guter Figuren erhöht seine Verständlichkeit. Die Literatur ist mit großer Vollständigkeit bis Mitte des Jahres 1925 berücksichtigt.

Ein gewisser Unterschied läßt sich an manchen Stellen zwischen den alten und den neuen Kapiteln bemerken insofern, als in den letzteren nicht selten der Text knapper gehalten und in reichlicherem Maße auf die einschlägige Literatur verwiesen ist, während unter den alten Abschnitten sich manche von ganz außerordentlicher Breite und Ausführlichkeit finden, denen man ohne weiteres ihre ursprüngliche Verwendung als „Praktikumsanleitungen" ansieht. Eine neue Auflage, die ja sicher ziemlich bald zu erwarten sein wird, könnte da etwas Ausgleich schaffen. Wünschenswert erscheint auch eine Berücksichtigung sachlich wertvoller, Fußnoten im Sachregister. Das gilt z. B. für die außerordentlich vollständige Zusammenstellung der Literatur über die Reindarstellung einer großen Anzahl organischer Lösungsmittel auf S. 597, die sicher niemand im Kapitel „Chemische Kinetik" suchen wird.

Zusammenfassend läßt sich sagen, daß die ungeheure Menge wertvollster praktischer Erfahrungen, die hier zusammengetragen ist, den neuen Ostwald-Luther auch für den experimentierenden Physiker als ein fast unentbehrliches Hilfs- und Nachschlagewerk erscheinen läßt. J. Wüst.

A. Fodor, Die Grundlagen der Dispersoidchemie. Gr. 8°. 280 S. m. 34 Abb. Dresden und Leipzig, Th. Steinkopff. 1925. Geh. M. 12.—, geb. M. 14.—.

Unter „Dispersoidchemie" versteht der Verfasser eine nach zwei Seiten erweiterte Kolloidchemie, d. h. eine Wissenschaft, die außer den eigentlichen Kolloiden einerseits grobe Suspensionen und Emulsionen, andererseits die molekularen Lösungen behandelt. Im wesentlichen ist das vorliegende Werk jedoch eine kurze Darstellung der physikalischen und chemischen Eigenschaften kolloider Systeme (Teilchengröße etwa 1—100 $\mu\mu$), und die Fälle gröberer und feinerer Verteilung werden nur gelegentlich gestreift. Speziell wird auf biochemisch wichtige Systeme (Eiweiß, Fermente) eingegangen.

Wegen seiner nicht ganz leichten Darstellung ist das Werk als erste Einführung in dieses Gebiet wenig geeignet. Es dürfte in erster Linie für den Kolloidchemiker nnd Biochemiker Interesse haben.

H. Wolff.

Astronomischer Kalender für 1926. Herausgegeben von der Universitätssternwarte zu Wien. 45. Jahrg. 8°. 123 S. Wien und Leipzig, C. Gerolds Sohn. 1925. Geb. M. 4.—.

Außer den für den Liebhaberastronomen wichtigen Daten enthält der Kalender unter anderem einen zusammenfassenden Aufsatz über die Polschwankungen von A. Prey (Prag). A. Kopff.

Personalien.

(Der Herausgeber bittet die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Habilitiert: An der Universität Leipzig Dr. Harry Schmidt für theoretische und technische Mechanik.

Ernannt: Der Privatdozent an der Universität Leipzig Professor Dr. Ludwig Neder zum a. o. Professor der Mathematik an der Universität Tübingen, der Privatdozent für angewandte Mechanik an der Universität Göttingen Dr. Arpad Nadori zum a. o. Professor ebenda, der Privatdozent an der Technischen Hochschule München Dr. Ing. Adolf Schlötzer zum ord. Professor der praktischen Geometrie und Geodäsie an der Technischen Hochschule Karlsruhe, der Vorstand an der meteorologischen Abteilung der Deutschen Seewarte in Hamburg Regierungsrat Dr. Walter Georgii zum a. o. Professor für aeronautische Meteorologie an der Technischen Hochschule Darmstadt, der Privatdozent an der Technischen Hochschule Karlsruhe Dr. Robert Furch zum a. o. Professor für Mathematik an der Universität Rostock.

Ehrung: Der ord. Professor der Experimentalphysik an der Technischen Hochschule Zürich Dr. Peter Debye wurde von der Dänischen Akademie der Wissenschaften in Kopenhagen zu ihrem Mitglied ernannt.

Gestorben: Der ord. Professor der allgemeinen und industriellen Physik an der Universität Cordoba (Argentinien) Dr. Oscar Doering (aus Göttingen), der wissenschaftliche Mitarbeiter und Leiter der medizinischen optischen Abteilung der Firma Carl Zeiss in Jena Professor Dr. Otto Henker.

Angebote.

Jüngerer Physiker

für das Forschungslaboratorium einer Firma der chemischen Großindustrie

gesucht.

In Betracht kommen nur Bewerber, die über eine gründliche und vielseitige experimentelle und theoretische Ausbildung verfügen und fähig sind, sich selbständig in neue Gebiete einzuarbeiten. Ausführliches Angebot mit Angaben über bisherige Tätigkeit und Zeugnissen unter S. H. 643 an den Verlag der Physikalischen Zeitschrift (S. Hirzel) in Leipzig, Königstr. 2.

Am

Marine-Observatorium zu Wilhelmshaven

ist zum 1. Juli ds. Js. die Stelle eines

Meteorologen

neu zu besetzen. Gefordert wird abgeschlossene Hochschulbildung und praktische Tätigkeit an einem meteorologischen Institut. Erwünscht sind Kenntnisse auf dem Gebiet des Erdmagnetismus. Besoldung nach Gruppe X des Reichsangestelltentarifvertrages, Ortsklasse A.

Ausführliche Bewerbungen mit Lebenslauf, Zeugnisabschriften, Angaben über bisherige Tätigkeit sind zu richten an den Vorstand des Marine-Observatoriums.

Für die Schriftleitung verantwortlich Prof. Dr. F. Harms in Würzburg. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.